Problemas de agregación

Gabriel Montes-Rojas
Universidad de Buenos Aires
Email: gabriel.montes@fce.uba.ar
Web: http://gabrielmontes.com.ar

Agregación de distintos bienes

- Supongamos dos tipos de bienes, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ con precios $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$.
- Supongamos que queremos agregar los bienes $\boldsymbol{x}$ en un solo bien índice X (canasta representativa), con **precio índice** o precio promedio P, tal que $P = f(\boldsymbol{p})$ y $X = g(\boldsymbol{x})$.
- Queremos ver bajo qué condiciones estos dos problemas son equivalentes:
  (1) $\max\limits_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}} u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$, sujeto a $\boldsymbol{px} + \boldsymbol{qz} = m$.
  (2) $\max\limits_{X,\boldsymbol{z}} U(X, \boldsymbol{z})$, sujeto a $PX + \boldsymbol{qz} = m$. En este caso U es una función de utilidad que depende del X agregado.
- La solución es entonces encontrar $X(P, \boldsymbol{q}, m) = X(f(\boldsymbol{p}), \boldsymbol{q}, m) = g(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, m))$.

Agregación de distintos bienes
Separabilidad hicksiana

- Supongamos que $\boldsymbol{p} = t\boldsymbol{p}^0$, es decir, los precios son proporcionales a una base $\boldsymbol{p}^0$. Implica que la proporcionalidad entre los precios de $\boldsymbol{x}$ es la misma. Definamos $P = t$, $X = \boldsymbol{p}^0\boldsymbol{x}$. En este caso definimos la utilidad indirecta como
  $V(P, \boldsymbol{q}, m) = \max_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}} u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$, sujeto a $P\boldsymbol{p}^0\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}\boldsymbol{z} = m$.
  Tenemos entonces también $V(P, \boldsymbol{q}, m) = \max_{X,\boldsymbol{z}} U(X, \boldsymbol{z})$, sujeto a $PX + \boldsymbol{q}\boldsymbol{z} = m$.
- Por identidad de Roy,
  $$X(P, \boldsymbol{q}, m) = -\frac{\partial V(P, \boldsymbol{q}, m)/\partial P}{\partial V(P, \boldsymbol{q}, m)/\partial m} = \boldsymbol{p}^0\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, m)$$
  .
  Se obtiene el mismo resultado en los dos casos. Es decir, se puede trabajar con el agregado y obtener la misma información.
- ¿? Podemos recuperar $U(X, \boldsymbol{z}) = \min_{P,\boldsymbol{q}} V(P, \boldsymbol{q}, m)$, sujeto a $PX + \boldsymbol{q}\boldsymbol{z} = m$.
- Podemos entonces redefinir $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, m) = \boldsymbol{z}(\boldsymbol{q}/P, m/P)$, es decir, deflactando los precios en base al indice de $\boldsymbol{p}$.

Agregación de distintos bienes
Separabilidad funcional

- **Utilidad débilmente separable**. Supongamos que $u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = U(v(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{z})$ donde U es creciente en ambos argumentos.
- Definamos $m_x = \boldsymbol{px}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, m)$. Si la utilidad es separable, entonces podemos resolver el problema por partes:
  (i) $\max_{\boldsymbol{x}} v(\boldsymbol{x})$, sujeto a $p\boldsymbol{x} = m_x$. Definamos $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{p}, v)$ como la función de gasto de este problema.
  (ii) $\max_{v,\boldsymbol{z}} U(v, \boldsymbol{z})$, sujeto a $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{p}, v) + \boldsymbol{qz} = m$.
- Para que el problema pueda representarse con una restricción de presupuesto lineal necesitamos también que $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{p}, v) = \boldsymbol{e}(\boldsymbol{p})v$, o que la función de subutilidad sea homotética.[1]

[1] Una función es homotética si $f(\boldsymbol{x}) = g(h(\boldsymbol{x}))$ donde g es una función estríctamente creciente y h es homogénea de grado 1.

Agregación de distintos consumidores

- Supongamos $i = 1, 2, ..., n$ consumidores.
- La función de demanda agregada se define como $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{p}, m_1, .., m_n)$.
- Las funciones agregadas son continuas y homogéneas de grado 0. Pero no se heredan más propiedades...
- **Forma de Gorman** (condición necesaria y suficiente): $v_i(\boldsymbol{p}, m_i) = a_i(\boldsymbol{p}) + b(\boldsymbol{p})m_i$. Entonces, por identidad de Roy

$$x_i^j(\boldsymbol{p}, m_i) = \alpha_i(\boldsymbol{p}) + \beta^j(\boldsymbol{p})m_i$$

donde

$$\alpha_i^j(\boldsymbol{p}) = -\frac{\partial a_i(\boldsymbol{p})/\partial p_j}{b(\boldsymbol{p})}$$

$$\beta_i^j(\boldsymbol{p}) = -\frac{\partial b(\boldsymbol{p})/\partial p_j}{b(\boldsymbol{p})}$$

- Entonces $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{p}, m_1, .., m_n) = -\left[\sum_i^n \frac{\partial a_i(\boldsymbol{p})/\partial p_j}{b(\boldsymbol{p})} + \frac{\partial b(\boldsymbol{p})/\partial p_j}{b(\boldsymbol{p})} \sum_i^n m_i\right]$.
- Entonces podemos generar

$$V(\boldsymbol{p}, M) = A(\boldsymbol{p}) + B(\boldsymbol{p})M$$

donde $M = \sum_i^n m_i$. Si usamos la identidad de Roy a V tenemos las demandas individuales.

Agregación de distintos consumidores

- Supongamos $i = 1, 2$ consumidores. Entonces $X^j(\boldsymbol{p}, m_1 + m_2) = x_1^j(\boldsymbol{p}, m_1) + x_2^j(\boldsymbol{p}, m_2)$.
- Diferenciando con respecto a m_i vemos que $\partial x_1^j(\boldsymbol{p}, m_1)/\partial m_1 = \partial x_2^j(\boldsymbol{p}, m_2)/\partial m_2$.
- Funciones de utilidad homotéticas satisfacen forma de Gorman.
- Ejercicio: Derivar la demanda agregada para dos consumidores con utilidad Cobb-Douglas, iguales y diferentes.

Axioma débil de la preferencia revelada

La demanda agregada $X(\boldsymbol{p}, M)$ *satisface el axioma débil si* $\boldsymbol{p}X(\mathbf{p}', m') \leq M$ *y* $X(\boldsymbol{p}, M) \neq X(\mathbf{p}', M')$ *implica* $\mathbf{p}'X(\boldsymbol{p}, m) \leq M'$ *para todo* $(\boldsymbol{p}, M)$ *y* $(\mathbf{p}', M')$.

- El problema es que aún cuando se pueda satisfacer a nivel individual, y a nivel agregado los efectos se compensan, esto puede no ser correcto a nivel individual.
- Si todas las preferencias de los individuos son homotéticas, entonces la demanda agregada satisface el axioma.

Existencia del consumidor representativo

- ¿Cuándo se puede pensar que la demanda agregada representa a un consumidor representativo?
- Supongamos una regla de distribución $(m_1(\boldsymbol{p}, M), ..., m_n(\boldsymbol{p}, M))$ tal que $M = \sum_i^n m_i$.
- Una función de utilidad social $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ asigna utilidad a valores de utilidades individuales, $W(u_1, ..., u_n)$.
- Un planificador central realiza $\max\limits_{(m_1,...,m_n)} W(v_1(\boldsymbol{p}, m_1), ..., v_n(\boldsymbol{p}, m_n))$ sujeto a $\sum_i^n m_i \leq M$.
- La solución a este problema es la función indirecta de utilidad de un consumidor representativo tal que $X(\boldsymbol{p}, M) = \sum_i \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, w_i(\boldsymbol{p}, m_i)$.

Oferta agregada

- Sea m la cantidad de firmas. Cada firma tiene oferta $\boldsymbol{y}_i(\boldsymbol{p})$.
- Entonces la oferta agregada (OA) es $\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{p}) = \sum_i^m \boldsymbol{y}_i(\boldsymbol{p})$.
- Notar que dado que todas las firmas enfrentan los mismos precios, entonces tienen los mismos costos marginales.
- Ejemplo: Supongamos dos firmas con $c_1(y) = y^2$, $c_2(y) = 2y^2$. Entonces $y_1(p) = p/2, y_2(p) = p/4$. La OA es $Y(p) = 3p/4$. Así debemos tener $p = 4Y/3 = CMG_1(y_1) = CMG_2(y_2)$.
- Supongamos m firmas con identico costo $c(y) = y^2 + 1$, $CM(y) = 2y$, $CMeV(y) = y$. Entonces $y_i(p) = p/2$ y $Y(p, m) = mp/2$ o $p(Y) = 2Y/m$. Si $m \to \infty$, $p \to 0$.