Equilibrio general (Producción)

Gabriel Montes-Rojas
Universidad de Buenos Aires
Email: gabriel.montes@fce.uba.ar
Web: http://gabrielmontes.com.ar

Producción

- Supongamos m firmas que producen los k bienes. Definamos $\boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{y}_j$ como la producción agregada donde cada $\boldsymbol{y}_j \in Y_j$, el conjunto de posibilidades de producción. También, $Y = \sum_{j=1}^{m} Y_j$, como el conjunto de posibilidades de producción agregado.
- $\boldsymbol{y}$ maximiza los beneficios agregados si cada firma o hace individualmente.
- Definamos $\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{p}) = \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{y}_j(\boldsymbol{p})$ como la oferta neta agregada.

Consumidores

- Los consumidores ahora no solo tienen remuneración por sus dotaciones, sino que reciben los beneficios de la firmas.
- Suongamos un conjunto de números $\{T_{ij} \in [0,1]\}$, donde T_{ij} es la proporción de los beneficios de la firma j que corresponden al individuo i. Para cada j, $\sum_{i=1}^{n} T_{ij} = 1$.
- Entonces el problema del consumidor es $\max u_i(\boldsymbol{x}_i)$ s.a. $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{p}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j=1}^{m} T_{ij}\boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j(\boldsymbol{p})$.
- Entonces definamos la demanda agregada como $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{p}) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p})$.
- Definamos las dotaciones agregadas como $\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_i$.
- Definamos la función de exceso de demanda agregada,

$$\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{\omega}$$

.

Ley de Walras con producción

Ley de Walras: $\boldsymbol{p}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p}) = 0$ para todo $\boldsymbol{p}$.

- $\boldsymbol{p}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}\left[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{\omega}\right] = \boldsymbol{p}\left[\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}) - \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{y}_j(\boldsymbol{p}) - \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_i\right] = \left[\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}) - \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j(\boldsymbol{p}) - \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{p}\boldsymbol{\omega}_i\right]$.
- Ahora si reemplazamos la restricción de presupuesto de cada consumidor obtenemos el resultado.

Existencia de EW

Existe un EW si:

1. Para todo consumidor i, el conjunto de posibilidades de consumo es cerrado, convexo y acotado por debajo.
2. Para todo consumidor i hay no saciedad.
3. Para todo consumidor i, los conjuntos $\{\boldsymbol{x}_i : \boldsymbol{x}_i \succeq_i \boldsymbol{x}'_i\}$ y $\{\boldsymbol{x}_i : \boldsymbol{x}'_i \succeq_i \boldsymbol{x}_i\}$ son cerrados.
4. Cada consumidor tiene las dotaciones iniciales $\boldsymbol{\omega}_i$ en el interior de su conjunto de posibilidades de consumo.
5. Para cada consumidor i, si $\boldsymbol{x}_i \succ_i \boldsymbol{x}'_i$ entonces $\boldsymbol{t}x_i + (1-t)x'_i \succ_i \boldsymbol{x}'_i$ para todo $t \in (0,1)$.
6. Para toda firma j, $\mathbf{0} \in \boldsymbol{Y}_j$.
7. $Y = \sum_{j=1}^{m} Y_j$ es cerrado y convexo. (Las funciones de oferta son continuas.)
8. $Y \cap (-Y) \subset \{\mathbf{0}\}$. (La producción es irreversible.)
9. $Y \subset \{-\mathbb{R}_+\}$. (La producción que usa todos los insumos es factible.)

La prueba se debe a Debreu (1959).

Primer teorema del bienestar

Si $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{p})$ es EW, entonces $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ es ESP.

- Supongamos que no lo es y que existe $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}')$ tal que al menos un consumidor lo prefiere estrictamente.
- Entonces por maximización de la utilidad, $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i' > \boldsymbol{p}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j=1}^{m} T_{ij}\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j$ para $i = 1, ..., n$.
- Sumemos sobre i, tenemos $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}' > \boldsymbol{p}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j$.
- Por factibilidad tenemos que $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{p}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{p}\boldsymbol{y}'$. Pero entonces, $\boldsymbol{p}\boldsymbol{y}' > \boldsymbol{p}\boldsymbol{y}$, lo cual contradice la maximización de beneficios.

Segundo teorema del bienestar

Supongamos que $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$ es ESP donde cada consumidor tiene $\boldsymbol{x}_i^* >> \mathbf{0}$, y las preferencias son convexas, continuas y fuertemente monótonas. Supongamos que los conjuntos de posibilidades de producción Y_j, $j = 1, ..., m$ son convexos. Entonces existe $\boldsymbol{p} \geq \mathbf{0}$ tal que
(1) si $\boldsymbol{x}_i' \succ \boldsymbol{x}_i^*$, entonces $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i' > \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i^*$ para $i = 1, ..., n$;
(2) si $\boldsymbol{y}_j \in Y_j$, entonces $\boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j^* > \boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j'$ para $j = 1, ..., m$.

- Definamos P como el conjunto de cestas de consumo agregadas preferidas a $\boldsymbol{x}^*$. Definamos F como el conjunto de cestas agregadas factibles, $F = \left\{\omega + \sum_{j=1}^m \boldsymbol{y}_j : \boldsymbol{y}_j \in Y_j\right\}$.
- Por los supuestos P y F son conjuntos convexos. Como $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$ es ESP, entonces $P \cap F = \emptyset$.
- Usando el Teorema del Hiperplano Separador, existe $\boldsymbol{p}$ tal que $\boldsymbol{p}\boldsymbol{z}' \geq \boldsymbol{p}\boldsymbol{z}''$ para todo $\boldsymbol{z}' \in P$ y $\boldsymbol{z}'' \in F$.
- Por monotonicidad de las preferencias tenemos que $\boldsymbol{p} \geq \mathbf{0}$.
- Cada consumidor maximiza utilidad y cada firma beneficios.

Economía de Robinson Crusoe

Rendimientos constantes a escala

- Supongamos Robinson vive en una isla, tiene una dotación de trabajo disponible de $\bar{L} = 1$ horas de trabajo disponibles, de las cuales consume ocio R.
- Asumamos una utilidad Cobb-Douglas, $u(x, R) = \alpha lnx + (1 - \alpha)lnR$.
- Hay disponible una función de producción que transforma trabajo (L) en bienes de consumo (x), $f(L) = aL$, $a > 0$. Se asume rendimientos constantes a escala (RCE).
- Un modelo de planificación centralizada propone: $\max_L \; u(aL, 1 - L) = \alpha ln(aL) + (1 - \alpha)ln(1 - L)$.
- CPO: $\alpha/aL^{-1} = (1 - \alpha)(1 - L)^{-1}$. Entonces, $L = \frac{\alpha/a}{1-\alpha+\alpha/a}$.

Economía de Robinson Crusoe

Rendimientos constantes a escala

- Supongamos este mismo problema pero ahora desde el punto de vista de una economía descentralizada.
- Firma: $\pi(p, w) = \max_{L \geq 0}\ paL - wL$. Los beneficios tienen que ser 0 en RCE, entonces $a = w/p$.
- Consumidor: $\max_{(x,R)}\ \alpha lnx + (1-\alpha)lnR$ s.a. $px + wR = w$, $R \leq 1$. Los beneficios son 0 en modelos con RCE. Entonces, $x = \frac{w}{p}(1-R)$.
- Resolver las CPO.
- Un EW es un vector $(p^*, w^*, L^{s*}, L^{d*}, x^{s*}, x^{d*})$ tal que $x^{s*} = x^{d*}$ y $L^{s*} = L^{d*}$.

Economía de Robinson Crusoe

Rendimientos decrecientes a escala

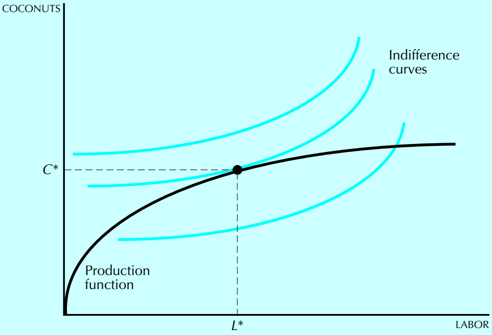
- Supongamos Robinson vive en una isla, tiene una dotación de trabajo disponible de $\bar{L} = 1$ horas de trabajo disponibles, de las cuales consume ocio R.
- Asumamos una utilidad Cobb-Douglas, $u(x, R) = \alpha lnx + (1 - \alpha)lnR$.
- Hay disponible una función de producción que transforma trabajo (L) en bienes de consumo (x), $f(L) = L^{1/2}$. Se asume entonces rendimientos decrecientes a escala (RDE).
- Un modelo de planificación centralizada propone: $\max_L \alpha lnL^{1/2} + (1 - \alpha)ln(1 - L)$.
- CPO: $\alpha/2L^{-1} = (1 - \alpha)(1 - L)^{-1}$. Entonces, $L^* = \frac{\alpha}{2-\alpha}$.

Economía de Robinson Crusoe

Rendimientos decrecientes a escala

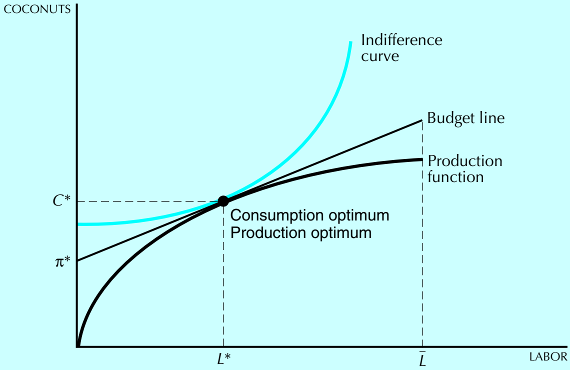
- Supongamos este mismo problema pero ahora desde el punto de vista de una economía descentralizada. Asumamos $p = 1$ y que $\bar{L} = 1$.
- Firma: $\pi(w) = \max_{L \geq 0} L^{1/2} - wL$. La solución es $L^s = (2w)^{-2}$, $x^s = (2w)^{-1}$, $\pi(w) = (2w)^{-1} - w(2w)^{-2} = (4w)^{-1}$.
- Consumidor: $\max_{(x,R)} x^{\alpha} R^{1-\alpha}$ s.a. $px + wR = w + \pi(w)$, $R \leq 1$.
- Resolver las CPO: $R(w) = \frac{(1-\alpha)}{w}(w + \pi(w)) = \frac{(1-\alpha)}{w}\left(1 + \frac{1}{4w^2}\right)$.
- Un EW es un vector $(p^*, w^*, L^{s*}, L^{d*}, x^{s*}, x^{d*})$ tal que $x^{s*} = x^{d*}$ y $L^{s*} = L^{d*}$.
- Observemos el mercado de trabajo: $\frac{1}{4w^2} = 1 - \frac{(1-\alpha)}{w}\left(1 + \frac{1}{4w^2}\right)$. Entonces, $w^* = \left(\frac{2-\alpha}{4\alpha}\right)^{1/2}$. También, tenemos que $\pi^* = \frac{1}{4}\left(\frac{2-\alpha}{4\alpha}\right)^{-1/2}$.
- ¿De dónde salen los beneficios? Podemos pensar que hay otro factor, capital, tal que tenemos CRE: $f(L, K) = L^{1/2}K^{1/2}$.

Economía de Robinson Crusoe



The Robinson Crusoe economy. The indifference curves depict Robinson's preferences for coconuts and leisure. The production function depicts the technological relationship between the amount he works and the amount of coconuts he produces.

Economía de Robinson Crusoe



Equilibrium in both consumption and production. The amount of coconuts demanded by the consumer Robinson equals the amount of coconuts supplied by Crusoe, Inc.

Economía de Robinson Crusoe

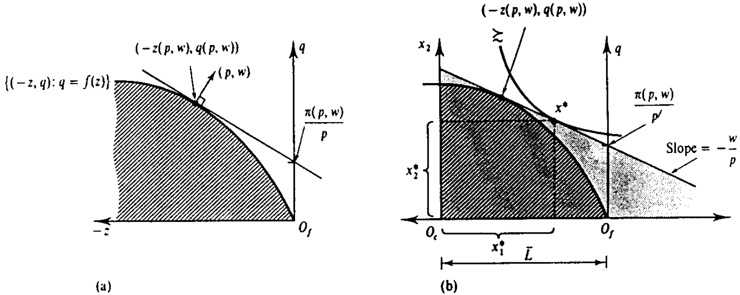
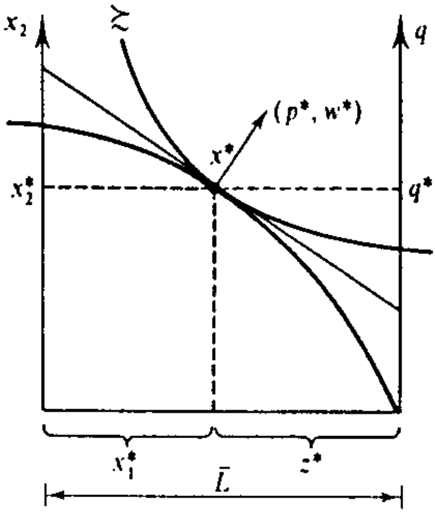


Figure 15.C.1 (a) The firm's problem. (b) The consumer's problem.

Economía de Robinson Crusoe



Economía de Robinson Crusoe

- Supongamos Robinson vive en una isla, tiene una dotación de trabajo disponible y de bienes de capital.
- $\max\limits_{(c,1-\ell,1-k)} u(c,1-\ell,1-k)$ sujeta a $f(\ell,k) \geq c$, $\ell \leq 1$, $k \leq 1$.
- $\max\limits_{(\ell,k)} u(f(\ell,k),1-\ell,1-k)$.
- CPO: $\begin{array}{c} u'_c f'_\ell - u'_{1-\ell} = 0 \\ u'_c f'_k - u'_{1-k} = 0 \end{array} \Rightarrow TMS = \frac{u'_\ell}{u'_k} = \frac{f'_\ell}{f'_k} = RTS$

Economía de Robinson Crusoe

- 3 mercados (c, ℓ, k), 3 precios (p, w, r).
- Consumidor: $\max\limits_{(c,\ell,k)} u(c, 1-\ell, 1-k)$ sujeta a $pc \leq w\ell + rk$, $\ell \leq 1$, $k \leq 1$.

  $\max\limits_{(\ell,k)} u(\frac{w\ell+rk}{p}, 1-\ell, 1-k)$.

  CPO: $\begin{array}{l} u'_c w/p - u'_{1-\ell} = 0 \\ u'_c r/p - u'_{1-k} = 0 \end{array} \Rightarrow \frac{u'_\ell}{u'_k} = \frac{w}{r}, \frac{u'_\ell}{u'_c} = \frac{w}{p}, \frac{u'_c}{u'_k} = \frac{p}{r}$.

  La solución es $c^C(p, w, r)$, $\ell^C(p, w, r)$, $k^C(p, w, r)$.
- Firma: $\max\limits_{(c,\ell,k)} pc - w\ell - rk$ sujeta a $f(\ell, k) \geq c$.

  $\max\limits_{(\ell,k)} pf(\ell, k) - w\ell - rk$.

  CPO: $\begin{array}{l} pf'_\ell - w = 0 \\ pf'_k - r = 0 \end{array} \Rightarrow f'_\ell = \frac{w}{p}, f'_k = \frac{r}{p}$.

  La solución es $c^F(p, w, r)$, $\ell^F(p, w, r)$, $k^F(p, w, r)$.
- EW: (p^*, w^*, r^*) tal que $c^C(p^*, w^*, r^*) = c^F(p^*, w^*, r^*)$, $\ell^C(p^*, w^*, r^*) = \ell^F(p^*, w^*, r^*)$, $k^C(p^*, w^*, r^*) = k^F(p^*, w^*, r^*)$.