Modelos básicos de datos en panel

Gabriel Montes-Rojas

3 tipos de estructuras de datos

- Corte transversal (Cross section) Muestra de individuos, hogares, firmas, países, etc. que se toman en un momento dado del tiempo.

  $\{y_i, x_i\}_{i=1}^{N}$, donde i representa individuos.

  Ej.: EPH de 2013, datos de PBI en 2013 para muchos países.
- Series de tiempo Muestra por varios periodos del mismo individuo, pais, firma, etc.

  $\{y_t, x_t\}_{t=1}^{T}$, donde t es tiempo.

  Ej.: Inflación en la Argentina.
- Datos en panel Combinación de las dos anteriores.

  $\{y_{it}, x_{it}\}_{i=1,t=1}^{N,T}$, donde i representa individuos y t tiempo.

  1. **Cortes transversales independientes**
  2. **Muestras longitudinales**

One-way error components model

En un panel longitudinal el mismo individuo es observado a lo largo del tiempo.

$$y_{it} = \alpha + X'_{it}\beta + u_{it}$$

$i = 1, 2, ..., N$ es el índice de individuos (firmas, familias, hogares, países),
$t = 1, 2, ..., T$ es el índice de tiempo,
α es un escalar, β es $K \times 1$, X_{it} es la observación *it* de las K variables explicativas.
El error tiene esta estructura:

$$u_{it} = \mu_i + \nu_{it}$$

es el **error compuesto**. *En inglés:* **one-way error components model**.

- μ_i: efecto individual no observado que captura todos los factores constantes a lo largo del tiempo en y_{it},
- ν_{it}: errores idiosincráticos o shocks.

One-way error components model

En notación matricial

$$y = \alpha\iota_{NT} + X\beta + u = Z\delta + u,$$

donde y y u son vectores $NT \times 1$, X es una matriz $NT \times K$, $Z = [\iota'_{NT}, X']'$, $\delta' = [\alpha, \beta']$ y ι_{NT} es un vector de 1s con dimensión $NT \times 1$

$$u = Z_\mu \mu + \nu$$

donde $Z_\mu = I_N \otimes \iota_T$ es una matriz $NT \times N$ de 1s y 0s, $\otimes$ es el producto de Kronecker, ι_T es un vector de 1s de dimensión T, $\mu = [\mu_1, ..., \mu_N]'$ es un vector $N \times 1$ que contiene los efectos individuales, y ν es un vector $NT \times 1$ con los errores. De esta manera $Z_\mu \mu$ es un vector también $NT \times 1$.

Two-way error components model

Consideremos el modelo

$$y_{it} = \alpha + X_{it}'\beta + u_{it}$$

$i = 1, 2, ..., N$ es el índice de individuos (firmas, familias, hogares, países),
$t = 1, 2, ..., T$ es el índice de tiempo,
α es un escalar, β es $K \times 1$, X_{it} es la observación *it* de las K variables explicativas.

$$u_{it} = \mu_i + \lambda_t + \nu_{it}$$

es el **error compuesto***. En inglés:* **two-way error components model***.*

- μ_i: efecto individual no observado que captura todos los factores constantes a lo largo del tiempo en y_{it},
- λ_t: efecto temporal no observado que captura todos los factores constantes a lo de los individuos en y_{it},
- ν_{it}: errores idiosincráticos o shocks.

Two-way error components model

En notación matricial

$$u = Z_\mu \mu + Z_\lambda \lambda + \nu,$$

donde $Z_\lambda = \iota_N \otimes I_T$ es una matriz $NT \times T$ de 1s y 0s, ι_N es un vector de 1s de dimensión N, $\lambda = [\lambda_1, ..., \lambda_T]'$ es un vector $T \times 1$ que contiene los efectos temporales.

Paneles multi-dimensionales

- Los modelos anteriores se pueden extender a una mayor cantidad de dimensiones.
- Ejemplos de 3 dimensiones (i, j, t):
  1. Modelos de comercio exterior podrían tener efectos por exportador, importador, tiempo, etc.
  2. Modelos de inmigración podrían tener efectos por país de origen, país de destino, año de inmigración, etc.

  En ambos casos podríamos tener efectos para cada elemento,

  $$u_{ijt} = \mu_i + \alpha_j + \lambda_t + \nu_{ijt},$$

  o efectos bilaterales, donde nos importan los efectos de a pares,

  $$u_{ijt} = \mu_{ij} + \lambda_t + \nu_{ijt}$$

- Un caso particular es el de los modelos anidados. Por ejemplo, si evaluamos políticas educativas, tendríamos un efecto por alumno (i), que pertenece a una determinada clase (j), de una escuela (k) a lo largo del tiempo (t). Así podríamos pensar en una estructura de errores:

  $$u_{ijkt} = \mu_i + \alpha_j + \gamma_k + \lambda_t + \nu_{ijkt}$$

- Ver el libro de Laszlo Matyas (`http://www.metrixmdp.eu`)

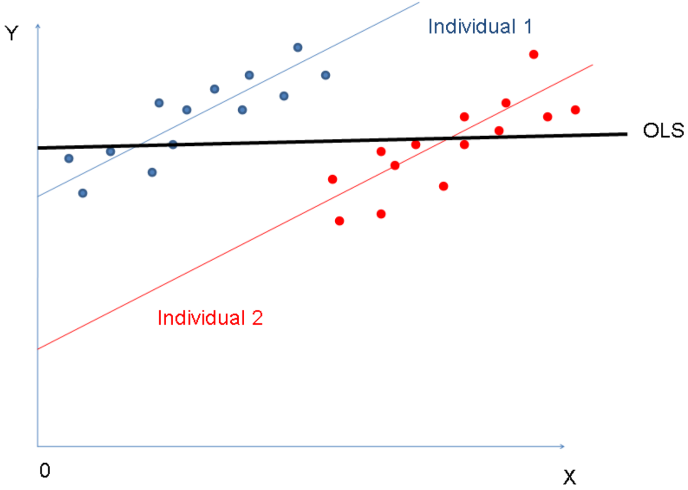
Una primera distinción

Si $cov(x_{it}, u_{it}) \neq 0 \Rightarrow$ OLS es sesgado. ¿Por qué?

Los siguientes estimadores se proponen como soluciones a este problema:

- **Estimador en primeras diferencias**
- **Efectos fijos**

Panel data



Estimador en diferencias (first differences,FD)

$$y_{it} = \beta_0 + \beta_1 x_{it} + \mu_i + \nu_{it}$$

$$y_{it-1} = \beta_0 + \beta_1 x_{it-1} + \mu_i + \nu_{it-1}$$

$$\Rightarrow \Delta y_{it} = \beta_1 \Delta x_{it} + \Delta \nu_{it}$$

donde Δ es el operador de diferencias, $\Delta y_{it} = y_{it} - y_{it-1}$

¡Lo que pasa es que μ_i desaparece, entonces se acaba el problema!

Efectos fijos (fixed-effects,FE)

$$y_{it} = \beta_0 + \beta_1 x_{it} + \mu_i + \nu_{it}$$

$$\bar{y}_i = \beta_0 + \beta_1 \bar{x}_i + \bar{\mu}_i + \bar{\nu}_i$$

$$\Rightarrow \tilde{y}_{it} = \beta_1 \tilde{x}_{it} + \tilde{\nu}_{i,t}$$

donde ˜ es una transformación que se aplica a cada invididuo (se usa en inglés **within transformation**), $\tilde{y}_{it} = y_{it} - \bar{y}_i$

¡Otra vez deseparece μ_i! (porque $\bar{\mu}_i = T^{-1} \sum_{t=1}^{T} \mu_i = T^{-1} T \mu_i = \mu_i$)

Efectos fijos (fixed-effects,FE)

En los estimadores de efectos fijos μ_i *se asumen como* **parámetros fijos a ser estimados** *y* $\nu_{it} \sim IID(0, \sigma_\nu^2)$. $x_{it} \perp\!\!\!\perp \nu_{it}, \forall i, t$.
Otro modo de ver los modelos FE es $E(\nu_{it}|x_{it}) \neq 0$ *pero que* $E(\nu_{it}|x_{it}, \mu_i) = 0$.
Entonces necesitamos estimar μ_i.

Efectos fijos (fixed-effects,FE)

- En notación matricial

$$y = \alpha \iota_{NT} + X\beta + Z_\mu \mu + \nu = Z\delta + Z_\mu \mu + \nu$$

- Definamos $P_\mu = Z_\mu (Z'_\mu Z_\mu)^{-1} Z'_\mu$ como la matriz de proyección en Z_μ, el subespacio de dummies por individuo. $Z_\mu Z'_\mu = I_N \otimes J_T$. Entonces $P_\mu = Z_\mu (Z'_\mu Z_\mu)^{-1} Z'_\mu = I_N \otimes \overline{J_T}$ donde $\overline{J_T} = J_T / T$.
- P_μ es una matriz que promedia las observaciones para los individuos. Así $P_\mu y$ tiene elementos $\bar{y}_i = 1/T \sum_{t=1}^{T} y_{it}$ repetido T veces para cada i.
- Probar que P_μ es simétrica ($P'_\mu = P_\mu$) e idempotente ($P_\mu \times P_\mu = P_\mu$) por lo que $rank(P_\mu) = tr(P_\mu) = N$.

Efectos fijos (fixed-effects,FE)

- Definamos también el complemento $Q_\mu = I_{NT} - P_\mu$. Q_μ se define entonces como las desviaciones con respecto a las medias (en inglés within-group operator): $\tilde{y}_{it} = y_{it} - \bar{y}_i$.
- Probar que Q_μ es simétrica e idempotente, y que $P_\mu Q_\mu = 0_{NT}$, por lo que $rank(Q_\mu) = tr(Q_\mu) = N(T-1)$.
- Entonces,

$$Q_\mu y = Q_\mu X\beta + Q_\mu \nu, \Rightarrow \hat{\beta}_{FE} = (X' Q_\mu X)^{-1} X' Q_\mu y$$

- Notar que $\hat{\beta}_{FE} = (\sum_{i=1}^{N}(X_i'(I_T - \bar{J}_T)X_i))^{-1} \sum_{i=1}^{N}(X_i'(I_T - \bar{J}_T)y_i)$. ¿Qué significa?
- ¿Qué tipo de variables quedan excluidas?

Efectos fijos (fixed-effects,FE)

Notar que $\hat{\beta}_{FE}$ es equivalente a un modelo OLS con una dummy para cada individuo i, $\hat{\beta}_{LSDV}$.

La prueba es una aplicación del Teorema de **Frisch-Waugh-Lovell**

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}_1\beta_1 + \boldsymbol{X}_2\beta_2 + \boldsymbol{u}$$

con estimadores OLS $\hat{\beta} = [\hat{\beta}_1 \ \hat{\beta}_2]$.
Usemos $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{y} = \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{X}_2\beta_2 + \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{u}$ donde $\boldsymbol{M}_1$ es la projección residual de $\boldsymbol{X}_1$, el teorema muestra que

$$\hat{\beta}_2 = (\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{X}_2)^{-1}\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{y}$$

Prueba: Consideremos $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}_X\boldsymbol{y} + \boldsymbol{M}_X\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}_1\hat{\beta}_1 + \boldsymbol{X}_2\hat{\beta}_2 + \boldsymbol{M}_X\boldsymbol{y}$. Multiplicar ambos lados por $\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{M}_1$ y obtenemos $\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{X}_2\hat{\beta}_2$. (usando $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{M}_X\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{0}$). Resolver.

Efectos fijos (fixed-effects,FE)

- Notar que $var(\hat{\beta}_{FE}) = \sigma_v^2 (X' Q_\mu X)^{-1}$.
- Podemos plantear $\hat{\mu}_i = \hat{y}_i - \hat{\beta}_{FE}\bar{x}_i$ o $\hat{\mu}_{FE} = Q_\mu y - \hat{\beta}_{FE} Q \mu X$ como el estimador de los "efectos fijos".
- Si $T \to \infty$, $(\hat{\mu}_{FE}, \hat{\beta}_{FE})$ son estimadores consistentes e insesgados.
- Pero si T está fijo y $N \to \infty$, sólo $\hat{\beta}_{FE}$ es consistente, aunque ambos son insesgados. El problema es conocido como el problema de parámetros incidentales de Neyman y Scott (1948).
- Contraste de efectos fijos: correr el modelo LSDV, y contrastar conjuntamente por la significatividad de las dummies.

Efectos fijos (fixed-effects,FE)-two-way

Para el modelo two-way tenemos $Z_\lambda Z'_\lambda = J_N \otimes I_T$. Entonces $P_\lambda = Z_\lambda (Z'_\lambda Z_\lambda)^{-1} Z'_\lambda = \overline{J_N} \otimes I_T$ donde $\overline{J_N} = J_N / N$.
Definamos la proyección residual

$$Q_{\mu\lambda} = E_N \otimes E_T = I_N \otimes I_T - I_N \otimes \overline{J_T} + \overline{J_N} \otimes I_T + \overline{J_N} \otimes \overline{J_T}$$

donde $E_N = I_N - \overline{J_N}$ y $E_T = I_T - \overline{J_T}$. Esta transformación elimina los efectos de μ_i y λ_t simultáneamente. La matriz $Q_{\mu\lambda}$ hace la siguiente transformación: $y_{it} - \bar{y}_i - \bar{y}_t + \bar{y}$. Entonces,

$$Q_{\mu\lambda} y = Q_{\mu\lambda} X\beta + Q_{\mu\lambda}\nu, \Rightarrow \hat{\beta}_{FE-2} = (X' Q_{\mu\lambda} X)^{-1} X' Q_{\mu\lambda} y$$

¿Qué tipo de variables quedan excluidas?

Efectos fijos (fixed-effects,FE)

Usar efectos fijos tiene algunas desventajas:

- Hay un costo en comparación con OLS sin controlar por las dummies por individuo. La transformación within es equivalente a estimar una dummy para cada individuo. O sea estimar $N-1$ parámetros adicionales. Más parámetros significa menos precisión.
- Entonces eso afecta los grados de libertad y por ende la precisión de lo que estimamos. Los grados de libertad son $NT - N - K$, comparado con $NT - 1 - K$
- También la transformación within (y first-differences) elimina TODO aquello que esta fijo para cada individuo. Entonces no se puede medir por ejemplo el efecto de SEXO, para individuos, o CONTINENTE para países.

Efectos fijos (fixed-effects,FE)

Comparando FE con FD (Baltagi, p.17):

- FE es más eficiente que FD cuando $\nu_{it} \sim iid(0, \sigma_{\nu}^2)$.
- FD es más eficiente que FE cuando ν_{it} es un paseo aleatorio (random walk).

Efectos aleatorios (random-effects,RE)

Un modelo alternativo es el de efectos aleatorios. Tiene un supuesto MUY importante y restrictivo: $cov(X, \mu) = 0$.
Consideremos el modelo

$$y_{it} = \beta_0 + \beta_1 x_{it} + u_{it} = \beta_0 + \beta_1 x_{it} + \mu_i + \nu_{it}$$

En este caso hay **correlación serial**:
$Cov(u_{it}, u_{is}) = Cov(\mu_i + \nu_{it}, \mu_i + \nu_{is}) = Var(\mu_i) \neq 0$ para $t \neq s$. El estimador de efectos aleatorios (RE) tiene en cuenta esta particularidad y produce un estimador eficiente GLS:

$$\hat{\beta}_{RE} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}(X'\Omega^{-1}y),$$

donde $\Omega = E(uu')$ es la matriz de varianzas-covarianzas de los errores compuestos.
Una de las ventajas de RE es que se pueden reincorporar variables fijas por individuos:

$$y_{it} = \beta_0 + \beta_1 x_{it} + \beta_2 z_i + \mu_i + \nu_{it}$$

donde z captura todas las variables que estan fijas para cada individuo y que se pueden observar.

Efectos aleatorios (random-effects,RE)

En el modelo RE $\mu_i \sim iid(0, \sigma_\mu^2)$, $\nu_{it} \sim iid(0, \sigma_\nu^2)$, $\mu_i \perp\!\!\!\perp \nu_{it}$. *Además tenemos* $X_{it} \perp\!\!\!\perp \mu_i$ *y* $X_{it} \perp\!\!\!\perp \nu_{it}$ *para todo* i *y* t.

$$\Omega = E(uu') = Z_\mu E(\mu\mu')Z'_\mu + E(\nu\nu') = \sigma_\mu^2(I_N \otimes J_T) + \sigma_\nu^2(I_N \otimes I_T).$$

Ω tiene esta estructura:

$$\begin{aligned} cov(u_{it}, u_{js}) &= \sigma_\mu^2 + \sigma_\nu^2 && para\ i = j, t = s \\ &= \sigma_\mu^2 && para\ i = j, t \neq s \\ &= 0 && para\ i \neq j \end{aligned}$$

Otra forma de verlo es como un modelo de **equicorrelación** intra cluster:

$$\begin{aligned} correl(u_{it}, u_{js}) &= 1 && para\ i = j, t = s \\ &= \sigma_\mu^2/(\sigma_\mu^2 + \sigma_\nu^2) := \rho && para\ i = j, t \neq s \\ &= 0 && para\ i \neq j, t \neq s \end{aligned}$$

Efectos aleatorios (random-effects,RE)

¿Cuáles serían las consecuancias de ignorar la correlación serial?
Supongamos el siguiente modelo de regresión univariada: $y_{it} = \beta x_{it} + \mu_i + \nu_{it}$, donde $\mu_i \sim iid(0, \sigma^2_\mu)$, $\nu_{it} \sim iid(0, \sigma^2_\nu)$, $\mu_i \perp\!\!\!\perp \nu_{it}$. Además tenemos $x_{it} \perp\!\!\!\perp \mu_i$ y $X_{it} \perp\!\!\!\perp \nu_{it}$ para todo i y t.

- Por un lado se puede probar que el estimador OLS $\hat{\beta}_{OLS} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T y_{it} x_{it}}{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T x^2_{it}}$ es insesgado y consistente.
- Sin embargo la varianza de OLS

$$var(\hat{\beta}_{OLS}) \neq \sigma^2_{\mu+\nu} \frac{1}{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T x^2_{it}}$$

  que es lo que estimaríamos de ignorar la correlación entre observaciones del mismo individuo. En particular, tendríamos

$$var(\hat{\beta}_{OLS}) = \sigma^2_{\mu+\nu} \frac{1}{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T x^2_{it}} + \sigma^2_\mu \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \sum_{s=1,t\neq s}^T x_{it} x_{is}}{(\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T x^2_{it})^2}.$$

- El resultado es que los errores estándar que estima STATA son incorrectos, por lo que toda la inferencia es incorrecta.
- Esta diferencia se llama el "factor de Moulton". Notar que depende de la correlación intra-individuo de las Xs. En particular si las Xs no están relacionadas entre sí para un mismo individuo, o sea $Cov(x_{it}, x_{is}) = 0, t \neq s$, entonces la varianza estándar es correcta.

Efectos aleatorios (random-effects,RE)

Para estimarlo vamos a tratar el problema como GLS (generalized least squares) donde se estima Ω.

- Siguiendo a Wansbeek y Kapteyn (1982,1983), Baltagi p.18, reemplacemos J_T por $T\overline{J_T}$, y I_T por $(E_T + \overline{J_T})$, donde por definición $E_T = I_T - \overline{J_T}$. Entonces reagrupando términos tenemos

$$\Omega = T\sigma_\mu^2(I_N \otimes \overline{J_T}) + \sigma_\nu^2(I_N \otimes E_T) + \sigma_\nu^2(I_N \otimes \overline{J_T})$$

$$= (T\sigma_\mu^2 + \sigma_\nu^2)(I_N \otimes \overline{J_T}) + \sigma_\nu^2(I_N \otimes E_T) = \sigma_1^2 P_\mu + \sigma_\nu^2 Q_\mu$$

  donde $\sigma_1^2 = (T\sigma_\mu^2 + \sigma_\nu^2)$.

- Esta es la descomposición espectral de Ω donde σ_1^2 (de multiplicidad N) y σ_ν^2 (de multiplicidad $N(T-1)$) son las raíces características de Ω.
- Esto permite hallar $\Omega^r = \sigma_1^{2r} P + \sigma_\nu^{2r} Q$ para todo r (en particular $r = -1$). [¿Por qué? Probar que es cierto.]

Efectos aleatorios (random-effects,RE)

- Entonces, surgen los siguientes estimadores

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{u' P_\mu u}{tr(P_\mu)} = T \sum_{i=1}^{N} \bar{u}_i^2 / N$$

$$\hat{\sigma}_\nu^2 = \frac{u' Q_\mu u}{tr(Q_\mu)} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{N} (u_{it} - \bar{u}_i)^2}{N(T-1)}$$

- Notar que u no es observado... hay diferentes alternativas, todas ellas consistentes: (i) usar los residuos OLS, (ii) los residuos de FE, y (iii) otras.

Efectos aleatorios (random-effects,RE)

El estimador RE es entonces

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{RE} &= [(X'Q_\mu X/\sigma_\nu^2) + (X'(P_\mu - \bar{J}_{NT})X/\sigma_1^2)]^{-1}[(X'Q_\mu y/\sigma_\nu^2) + (X'(P_\mu - \bar{J}_{NT})y/\sigma_1^2)] \\ &= [W_{XX} + \phi^2 B_{XX}]^{-1}[W_{Xy} + \phi^2 B_{Xy}]\end{aligned}$$

donde $W_{XX} = X'Q_\mu X$, $B_{XX} = X'(P_\mu - \bar{J}_{NT})X$, $\phi^2 = \sigma_\nu^2/\sigma_1^2$. También $var(\hat{\beta}_{RE}) = \sigma_\nu^2[W_{XX} + \phi^2 B_{XX}]^{-1}$.

Por otro lado $\hat{\beta}_{FE} = W_{XX}^{-1}W_{Xy}$ y $\hat{\beta}_{BE} = B_{XX}^{-1}B_{Xy}$, FE: fixed-effects-within; BE: between. Entonces, $\hat{\beta}_{RE} = W_1\hat{\beta}_{FE} + W_2\hat{\beta}_{BE}$ donde $W_1 = [W_{XX} + \phi^2 B_{XX}]^{-1}W_{XX}$ y $W_2 = [W_{XX} + \phi^2 B_{XX}]^{-1}\phi^2 B_{XX} = I - W_1$.

Nota: Análisis cuando $T \to \infty$, $N \to \infty$, $(\sigma_\nu^2, \sigma_\mu^2) \to 0, \infty$.

Efectos aleatorios (random-effects,RE)-two-way

En el modelo RE two-way $\mu_i \sim iid(0, \sigma_\mu^2)$, $\lambda_t \sim iid(0, \sigma_\lambda^2)$, $\nu_{it} \sim iid(0, \sigma_\nu^2)$, $\mu_i \perp\!\!\!\perp \nu_{it}$, $\lambda_i \perp\!\!\!\perp \nu_{it}$. *Además tenemos* $X_{it} \perp\!\!\!\perp \mu_i$, $X_{it} \perp\!\!\!\perp \lambda_t$ *y* $X_{it} \perp\!\!\!\perp \nu_{it}$ *para todo* i *y* t.

$$\Omega = E(uu') = Z_\mu E(\mu\mu')Z_\mu' + Z_\mu E(\lambda\lambda')Z_\lambda' + E(\nu\nu') =$$

$$\sigma_\mu^2(I_N \otimes J_T) + \sigma_\lambda^2(J_N \otimes I_T) + \sigma_\nu^2(I_N \otimes I_T).$$

Ω tiene esta estructura:

$$\begin{aligned}
cov(u_{it}, u_{js}) \quad &= \sigma_\mu^2 + \sigma_\lambda^2 + \sigma_\nu^2 && para\ i = j, t = s \\
&= \sigma_\mu^2 && para\ i = j, t \neq s \\
&= \sigma_\lambda^2 && para\ i \neq j, t = s \\
&= 0 && para\ i \neq j
\end{aligned}$$

Efectos aleatorios (random-effects,RE)-two-way

Para estimarlo vamos a tratar el problema como GLS (generalized least squares) donde se estima Ω.

- Baltagi p.37, reemplazar J_N por $N\overline{J_N}$, I_N por $E_N + \overline{J_N}$, J_T por $T\overline{J_T}$, I_T por $E_T + \overline{J_T}$,entonces

$$\Omega = \sum_{j=1}^{4} \eta_j Q_j$$

  donde $\eta_1 = \sigma_\nu^2$, $\eta_2 = T\sigma_\mu^2 + \sigma_\nu^2$, $\eta_3 = N\sigma_\lambda^2 + \sigma_\nu^2$, y $\eta_4 = T\sigma_\mu^2 + N\sigma_\nu^2 + \sigma_\nu^2$, $Q_1 = E_N \otimes E_T$, $Q_2 = E_N \otimes \overline{J_T}$, $Q_3 = \overline{J_N} \otimes E_T$, y $Q_4 = \overline{J_N} \otimes \overline{J_T}$. Esta es la descomposición espectral de Ω donde η_j son las raíces características. Cada Q_j es simétrica e idempotente.

- Entonces, surgen los siguientes estimadores

$$\hat{\eta}_j = \frac{u' Q_j u}{tr(Q_j)}, j = 1, 2, 3, 4$$

Efectos aleatorios (random-effects,RE)-two-way

El estimador RE es entonces

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{RE} &= [(X'Q_1X/\sigma_\nu^2) + (X'Q_2X/\eta_2) + (X'Q_3X/\eta_3)]^{-1}] \\ &\quad [(X'Q_1y/\sigma_\nu^2) + (X'Q_2y/\eta_2) + (X'Q_3y/\eta_3)] \\ &= [W_{XX} + \phi_2^2 B_{XX} + \phi_3^2 C_{XX}]^{-1}[W_{Xy} + \phi_2^2 B_{Xy} + \phi_3^2 C_{Xy}]\end{aligned}$$

donde $W_{XX} = X'Q_1X$, $B_{XX} = X'Q_2X$, $C_{XX} = X'Q_3X$, $\phi_j^2 = \sigma_\nu^2/\eta_j, j = 2, 3$. También $var(\hat{\beta}_{RE}) = \sigma_\nu^2[W_{XX} + \phi_2^2 B_{XX} + \phi_3^2 C_{XX}]^{-1}$.

Entonces, $\hat{\beta}_{RE} = W_1\hat{\beta}_{FE} + W_2\hat{\beta}_{BE1} + W_3\hat{\beta}_{BE2}$ donde $W_1 = [W_{XX} + \phi_2^2 B_{XX} + \phi_3^2 C_{XX}]^{-1} W_{XX}$, $W_2 = [W_{XX} + \phi_2^2 B_{XX} + \phi_3^2 C_{XX}]^{-1}\phi_2^2 B_{XX}$, y $W_3 = [W_{XX} + \phi_2^2 B_{XX} + \phi_3^2 C_{XX}]^{-1}\phi_2^2 C_{XX}$.

[Probar que en este caso también el estimador es un promedio ponderado de tres estimadores. Análisis cuando $T \to \infty$, $N \to \infty$, $(\sigma_\nu^2, \sigma_\mu^2, \sigma_\lambda^2) \to 0, \infty$.]

Contraste de Hausman

El estimador de efectos fijos es siempre **consistente**. Sin embargo, el de efectos aleatorios es válido si las Xs no estan correlacionadas con los efectos individuales (μ_i). Entonces, un contraste de la validez de efectos aleatorios es

$$H_0 : \hat{\beta}_{FE} - \hat{\beta}_{RE} = 0$$

$$H_A : \hat{\beta}_{FE} - \hat{\beta}_{RE} \neq 0$$

Este es el llamado contraste de Hausman.

Contraste de Hausman

- Notemos que el estimador RE es GLS, entonces es el de menor varianza.
- Por lo tanto $var(\hat{\beta}_{FE}) - var(\hat{\beta}_{RE})$ es una matriz definida positiva. Para demostrarlo notemos que tanto W_{XX} como B_{XX} son matrices definidas positivas (formas cuadráticas), mientras que $\phi^2 > 0$. Entonces $[W_{XX} + \phi^2 B_{XX}] - W_{XX}$ es definida positiva, por lo que $[W_{XX} + \phi^2 B_{XX}]^{-1} - W_{XX}^{-1}$ es definida negativa, o $var(\hat{\beta}_{RE}) - var(\hat{\beta}_{FE})$ es definida negativa.
- Se puede probar que $var(\hat{\beta}_{FE} - \hat{\beta}_{RE}) = var(\hat{\beta}_{FE}) - var(\hat{\beta}_{RE})$.
- Entonces, definamos

$$H = (\hat{\beta}_{FE} - \hat{\beta}_{RE})'[var(\hat{\beta}_{FE}) - var(\hat{\beta}_{RE})]^{-1}(\hat{\beta}_{FE} - \hat{\beta}_{RE})$$

tiene una distribución χ^2_K bajo la nula.

Contraste de Mundlak

(Hsiao, 2003, sec. 3.2; Wooldridge, 2012, sec. 10.7.3)

- Mundlak (1978) propone usar un modelo de regresión que contenga los promedios de individuos i de las variables que varían en i y t:

$$y_{it} = \beta_0 + \beta_1 x_{it} + \beta_2 z_i + \beta_3 \bar{x}_i + \mu_i + \nu_{it}$$

- Entonces un contraste de $H_0 : \beta_3 = 0$ es un contraste por la validez de RE.

¿Cómo implementar paneles en STATA?

- Los datos hay que organizarlos:

id	tiempo	YVAR	XVAR
1	1	y_{11}	x_{11}
1	2	y_{12}	x_{12}
1	3	y_{13}	x_{13}
2	1	y_{21}	x_{21}
2	2	y_{22}	x_{22}
2	3	y_{23}	x_{23}

  Es muy importante que no haya valores repetidos. En el ejemplo se representa un panel balanceado. Podra ser desbalanceado si tuviera gaps (ej., la obs. $i = 1, t = 2$ no está).

- Primero `STATA` tiene que identificar que se trata de datos en paneles. Para eso se nececita una variable numérica, ej. `id`, que identifica el individuo. Luego,
  `iis id`

- Pero si se tiene una muestra longitudinal con una estructura de series de tiempo, con una variable `tiempo`,
  `tsset id tiempo`

- Nota: la variable de tiempo tiene que ser en números discretos consecutivos. O sea, $t = -2, -1, 0, 1, ...$ o $t = 1980, 1981, 1982....$

¿Cómo implementar paneles en STATA?

- Entonces estamos listos para usar datos en paneles:
- `reg D.y D.x1 D.x2 D.x3` (modelo en diferencias, sólo con `tsset`)
- `xtreg y x1 x2 x3, fe` (modelo de efectos fijos)
- `xi: reg y x1 x2 x3 i.id` (lo mismo pero implementado "a mano" con dummies para `id`) [Nota: comparar con una regresión de las variables transformadas within. ¿Cúal sería el problema con este modelo?]
- `xtreg y x1 x2 x3, re` (modelo de efectos aleatorios)
- `xtreg y x1 x2 x3, be` (modelo between)
- `xi: xtreg y x1 x2 x3 i.tiempo, fe` (modelo de efectos fijos, two-way)

¿Cómo implementar paneles en STATA?

- Contraste de Hausman test

```
xtreg y x1 x2 x3, fe
est store fe
xtreg y x1 x2 x3, re
est store re
hausman fe re
```

¿Cómo implementar paneles en STATA?

- `http://www.ats.ucla.edu/stat/stata/examples/eacspd/chapter10.htm`
- `http://www.wiley.com/legacy/wileychi/baltagi/datasets.html`
- `webuse grunfeld`