Procesos multivariados

Gabriel V. Montes-Rojas

Modelos de vectores autoregresivos (VAR)

Consideremos 2 series, $\{y_t\}$ y $\{z_t\}$ que están mutuamente relacionadas. Un modelo VAR consiste en la modelación conjunta de estas series

$$y_t = b_{10} - b_{12} z_t + \gamma_{11} y_{t-1} + \gamma_{12} z_{t-1} + \varepsilon_{yt}$$
$$z_t = b_{20} - b_{21} y_t + \gamma_{21} y_{t-1} + \gamma_{22} z_{t-1} + \varepsilon_{zt}$$

Donde se asume:

- y_t y z_t son estacionarias;
- $\varepsilon_{yt} \sim (0, \sigma_y)$ y $\varepsilon_{zt} \sim (0, \sigma_z)$ son ruido blanco;
- ε_{yt} y ε_{zt} no están autocorrelacionados. Estos se definen como "shocks" que son cambios exógenos con sentido económico.

Esto constituye un modelo VAR de orden 1, VAR(1). Éste es un modelo VAR en forma **estructural** o **primitiva**.

Modelos de vectores autoregresivos (VAR)

- $-b_{12}$ es el efecto contemporáneo de z_t en y_t; $-b_{21}$ es el efecto contemporáneo de y_t en z_t;
- γ_{11} es el efecto de y_{t-1} en y_t; γ_{12} es el efecto de z_{t-1} en z_t; etc.
- Cada ecuación no puede estimarse por MCO. ¿Por qué? Sesgo de ecuaciones simultáneas. Probar.

Modelos de vectores autoregresivos (VAR)

Se puede reescribir el modelo como

$$\begin{bmatrix} 1 & b_{12} \\ b_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \end{bmatrix}$$

$$Bx_t = \Gamma_0 + \Gamma_1 x_t + \varepsilon_t$$

donde

$$B = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} \\ b_{21} & 1 \end{bmatrix}, x_t = \begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix}, \Gamma_0 = \begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{20} \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}, \varepsilon_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \end{bmatrix}$$

Premultiplicando por B^{-1},

$$x_t = A_0 + A_1 x_t + e_t$$

donde $A_0 = B^{-1}\Gamma_0$, $A_1 = B^{-1}\Gamma_1$, y $e_t = B^{-1}\varepsilon_t$. Esto es un modelo VAR en forma **estándar** o **reducida**. Los parámetros de (A_0, A_1) se pueden estimar por MCO.

Modelos de vectores autoregresivos (VAR)

$$e_{1t} = (\varepsilon_{yt} - b_{12}\varepsilon_{zt})/(1 - b_{12}b_{21})$$
$$e_{2t} = (\varepsilon_{zt} - b_{21}\varepsilon_{yt})/(1 - b_{12}b_{21})$$

Notar que e_{1t} y e_{2t} tienen media 0 y varianza constante, independiente del tiempo,

$$Var(e_{1t}) = (\sigma_{yt}^2 - b_{12}^2\sigma_{zt}^2)/(1 - b_{12}b_{21})^2$$
$$Var(e_{2t}) = (\sigma_{zt}^2 - b_{21}^2\sigma_{yt}^2)/(1 - b_{12}b_{21})^2$$

Ejercicio: Probar que las autocorrelaciones son 0 y encontrar la covarianza entre e_{1t} y e_{2t}.

Definir

$$\Sigma = \begin{bmatrix} Var(e_{1t}) & Cov(e_{1t}, e_{2t}) \\ Cov(e_{1t}, e_{2t}) & Var(e_{2t}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

VAR - Estabilidad y estacionariedad

Reemplazando n iteraciones llegamos a

$$x_t = (I + A_1 + A_1^2 + ... + A_1^n)A_0 + \sum_{i=0}^{n} A_1^i e_{t-i} + A_{n+1}x_{t-n-1}$$

La condición de estabilidad es que las raíces de $(1 - a_{11}L)(1 - a_{22}L) - (a_{12}a_{21}L^2)$ estén por fuera del círculo unitario. Definamos $\mu = [\bar{y}\ \bar{z}]'$ donde $\bar{y} = [a_{10}(1 - a_{22}) + a_{12}a_{20}]/\Delta$, $\bar{z} = [a_{20}(1 - a_{11}) + a_{21}a_{10}]/\Delta$, $\Delta = (1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21}$. Entonces,

$$x_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} A_1^i e_{t-i}$$

tal que $E[x_t] = \mu$ y $Var[x_t] = (I - A_1^2)^{-1}\Sigma$.

VAR - Estabilidad y estacionariedad

Otra forma de ver la estacionariedad es a través de las siguientes ecuaciones:

$$(1 - a_{11}L)y_t = a_{10} + a_{12}Lz_t + e_{1t}$$
$$(1 - a_{22}L)z_t = a_{20} + a_{21}Lz_t + e_{2t}$$

Entonces, resolviendo

$$y_t = \frac{a_{10}(1 - a_{22}) + a_{12}a_{20} + (1 - a_{22}L)e_{1t} + a_{12}e_{2t}}{(1 - a_{11}L)(1 - a_{22}L) - a_{12}a_{21}L^2}$$

$$z_t = \frac{a_{20}(1 - a_{11}) + a_{21}a_{10} + (1 - a_{11}L)e_{2t} + a_{21}e_{1t}}{(1 - a_{11}L)(1 - a_{22}L) - a_{12}a_{21}L^2}$$

Notar que ambas series tienen la misma ecuación característica, con lo que se requiere que las raíces del polinomio $(1 - a_{11}L)(1 - a_{22}L) - a_{12}a_{21}L^2$ estén fuera del círculo unitario.

VAR - Modelos para n variables, p rezagos

El modelo anterior puede ser generalizado para n variables y p rezagos:

$$x_t = A_0 + A_1 x_{t-1} + A_2 x_{t-2} + \ldots + A_p x_{t-p} + e_t$$

donde

- x_t es un vector $(n \times 1)$;
- A_0 es un vector $(n \times 1)$ de interceptos;
- A_i es una matriz $(n \times n)$ de coeficientes;
- e_t es un vector $(n \times 1)$ de errores.

Hay entonces $n + pn$ parámetros a estimar.
Se puede estimar cada ecuación por separado usando MCO.

VAR - Identificación

El problema de identificación tiene que ver con la posibilidad o no de despejar los parámetros estructurales a partir de la forma reducida.
Supongamos el VAR(1) para dos variables.

- El modelo estructural tiene 10 parámetros a estimar: $(b_{10}, b_{20}, b_{12}, b_{21}, \gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}, \sigma_y, \sigma_z)$.
- El modelo reducido tiene 9 parámetros a estimar: $(a_{10}, a_{20}, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12})$.
- Los parámetros no se pueden identificar a menos que impongamos una restricción adicional.
- En general para un modelo de n variables hay que imponer $(n^2 - n)/2$ restricciones.

VAR - Identificación

Una solución es descomponer los residuos en **forma triangular**, imponiendo 0s en la matriz B en algunos elementos fuera de la diagonal. Esto se llama la descomposición de **Choleski** o el método **recursivo** de Sims (1980).

- Por ejemplo podemos imponer $b_{21} = 0$: z_t puede tener un efecto contemporáneo en y_t, pero y_t no afecta z_t. (Se dice que z causa y contempóraneamente.)
- Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} e_{1t} &= \varepsilon_{yt} - b_{12}\varepsilon_{zt} \\ e_{2t} &= \varepsilon_{zt} \end{aligned}$$

tal que tenemos 3 ecuaciones con 3 incógnitas

$$\begin{aligned} var(e_1) &= \sigma_y^2 + b_{12}\sigma_z^2 \\ var(e_2) &= \sigma_z^2 \\ cov(e_1, e_2) &= -b_{12}\sigma_z^2 \end{aligned}$$

- Todos los parámetros del modelo estructural se pueden encontrar.

VAR - Funciones impulso respuesta

- Los modelos VAR se pueden escribir como modelos MA de infinitos rezagos usando el resultado $x_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} A_1^i e_{t-i}$. En particular,

$$e_t = \sum_{i=0}^{\infty} \phi(i)\varepsilon_{t-i}$$

donde $\phi(i) = A_1^i B^{-1} = \begin{bmatrix} \phi_{11}(i) & \phi_{12}(i) \\ \phi_{21}(i) & \phi_{2}(i) \end{bmatrix}$, tal que $x_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \phi(i)\varepsilon_{t-i}$.

- Los elementos de la matriz ϕ_i son los multiplicadores de impacto que determinan las **funciones de impulso respuesta**. Por ejemplo, $\phi_{12}(0)$ es el efecto contemporáneo de un shock en ε_z en y; $\phi_{12}(1)$ es el efecto con un rezago de un shock en ε_z en y, (o sea ε_{zt} en y_{t+1}).
- El efecto acumulado n periodos de un shock en la variable k sobre j es $\sum_{i=0}^{n} \phi_{jk}(i)$.
- Dado que los shocks no pueden tener un efecto permanente, debe darse que $lim_{i\to\infty}\phi_{jk}(i) = 0$ y también $\sum_{i=0}^{\infty} \phi_{jk}^2(i) < \infty$.

VAR - Descomposición de varianza

- Usando la forma de VMA anterior podemos encontrar el *error de predicción n-periodos adelante* (n-period forecast error)

$$x_{t+n} - E_t x_{t+n} = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \varepsilon_{t+n-i}$$

- La varianza error de predicción n-periodos adelante es

$$\Sigma(n) = var(\sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \varepsilon_{t+n-i}) = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i V_\varepsilon \phi_i'$$

- Por ejemplo para y, tenemos

$$\begin{aligned} y_{t+n} - E_t y_{t+n} \quad &= \phi_{11}(0)\varepsilon_{yt+n} + \phi_{11}(1)\varepsilon_{yt+n-1} + ... + \phi_{11}(n-1)\varepsilon_{yt+1} + \\ &\phi_{12}(0)\varepsilon_{zt+n} + \phi_{12}(1)\varepsilon_{zt+n-1} + ... + \phi_{12}(n-1)\varepsilon_{zt+1} \end{aligned}$$

$$\sigma_y^2(n) = \sigma_y^2(\phi_{11}^2(0) + \phi_{11}^2(1) + ... + \phi_{11}^2(n-1)) + \sigma_z^2(\phi_{12}^2(0) + \phi_{12}^2(1) + ... + \phi_{12}^2(n-1))$$

- Entonces podemos computar las proporciones que se deben a cada shock (forecast error variance decomposition):

$$\frac{\sigma_y^2(\phi_{11}^2(0) + \phi_{11}^2(1) + ... + \phi_{11}^2(n-1))}{\sigma_y^2(n)}$$

$$\frac{\sigma_z^2(\phi_{12}^2(0) + \phi_{12}^2(1) + ... + \phi_{12}^2(n-1))}{\sigma_y^2(n)}$$

VAR - Causalidad de Granger

- Un contraste de causalidad muy usado en series de tiempo es el de causalidad en el sentido de Granger.
- En un modelo de dos variables, $\{y_t\}$ no causa $\{z_t\}$ si y solo si los coeficientes $A_{21}(L)$ son cero.
- Si todas las variables son estacionarias el contraste de Granger es

$$a_{21}(1) = a_{21}(2) = ... = a_{21}(p) = 0$$

- Más formalmente, la no causalidad en el sentido de Granger implica

$$E(z_{t+1}|z_t) = E(z_{t+1}|z_t, y_t)$$

  (y_t no agrega información para predecir z_{t+1})
- La generalización para n variables, la variable j no causa i en el sentido de Granger si todos los coeficientes $A_{ij}(L)$ son 0.
- La causalidad o no de Granger no implica causalidad o no contemporánea, y viceversa.

Modelos de vectores autoregresivos (VAR)

En STATA, los modelos VAR se pueden implementar fácilmente. Consideremos un modelo con 3 variables: x,y,z endógenas y una variable exógena w. Entonces un modelo se puede implementar como:

- `varsoc x y z` /*para seleccionar la cantidad de rezagos*/
  Los criterios de información se pueden usar en procesos multivariados para elegir el número de lags/rezagos. Este método elige la misma cantidad de lags para todas las variables. Siguiendo a Hamilton (1994, 295-296) el log-likelihood basado en el supuesto de normalidad se puede escribir como $-(\frac{T}{2})\left(ln|\hat{\Sigma}| + Kln(2\pi) + K\right)$ donde K es la cantidad de ecuaciones, $\hat{\Sigma}$ es el estimador de verosimilitud de $E(a_t a_t')$ y T la cantidad de observaciones.
- `var x y z, lags(1/p) exog(w)` /*donde p es la cantidad de rezagos a usar*/
- `varlmar` /*para chequear que los residuos no tienen autocorrelación*/
- `varnorm` /*para chequear la normalidad del modelo*/
- `varstable` /*para chequear que los procesos son estables*/
  Para realizar inferencia con modelos VAR se requiere que las variables sean estacionarias en covarianzas. Para ello se debe chequear que todos los autovalores (eigenvalues) del modelo VAR sean menores que 1 en módulo.
- `vargranger` para análisis de causalidad de Granger.

Ejemplo empírico

Para ilustrar los modelos VAR consideremos el ejemplo de Lutkepohl (1993, Introduction to Multiple Time Series Analysis, New York:Springer, pp77-78). Los datos consisten en 3 variables, trimestrales de 1960 a 1982, de Alemania Occidental:

`dln_inv`: primera diferencia del log de inversión
`dln_inc`: primera diferencia del log del ingreso
`dln_consump`: primera diferencia del log de consumo

En STATA:

```
webuse lutkepohl2, clear
varsoc dln_inv dln_inc dln_consump
var dln_inc dln_consump, exog(dln_inv)
```

Predicción para modelos VAR

Para predecir se pueden usar los mismos comandos que para procesos univariados: `fcast` y `predict`.

- `fcast compute hat, step(8)`
  Esto crea nuevas variables que empezarán con "hat" para todas las variables endógenas en el modelo.
- `fcast graph`

Funciones de impulso respuesta (impulse response function)

Para estimaciones macroéconomicas es muy importante estudiar los efectos dinámicos de una varible sobre otras. En particular, se busca estimar el efecto de un shock en una variable sobre otras.

- Consideremos el siguiente ejemplo:

```
var x y z, lags(p)
irf create order1, set(myirf1)
irf graph oirf, impulse(y) response(z)
```

Cointegración: definición

Si $\{y_t\}$, $\{x_t\}$ son dos procesos I(1), entonces en general $y_t - \beta x_t$ es un proceso I(1) para cualquier β. Sin embargo, si existe $\beta \neq 0$ tal que $y_t - \beta x_t$ es I(0), entonces (y, x) estan **cointegradas***.*

En general para procesos multivariados si $\boldsymbol{y}_t$ es un vector de $K \times 1$ I(1) y existe un vector β tal que $\beta \boldsymbol{y}_t$ es I(0), entonces $\boldsymbol{y}_t$ es un vector de variables cointegradas con vector de cointegración β. Para un vector de dimensión K puede haber un máximo de $K - 1$ vectores de cointegración.

Cointegración: contrastes de hipótesis

¿Cómo contrastar por cointegración?

- H_0: y_t, x_t no están cointegradas.
- H_1: y_t, x_t están cointegradas.

1. Correr regresión de y_t en x_t.
2. Construir residuos $\hat{e}_t = y_t - \hat{\beta} x_t$.
3. Usar el contraste Dickey-Fuller (o Dickey-Fuller aumentado) a la serie $\{\hat{e}_t\}$, donde los valores críticos deben ser ajustados porque estamos estimando β.

Vector error-correction model (Engle and Granger, 1987)

Los modelos de VEC (vector error-correction) son una forma útil de trabajar con series de tiempo integradas. Consideremos dos series I(1) que estan cointegradas y los siguientes modelos:

$$y_t + \beta x_t = \epsilon_t, \ \epsilon_t = \epsilon_{t-1} + \xi_t,$$

$$y_t + \alpha x_t = \nu_t, \ \nu_t = \rho \nu_{t-1} + \zeta_t, \ |\rho| < 1$$

donde ξ_t y ζ_t son i.i.d. que están correlacionadas entre sí. Dado que ϵ_t es I(1), x_t y y_t también son I(1). La condición $|\rho| < 1$ implica que ν_t y $y_t + \alpha x_t$ son I(0). Así y_t y x_t están cointegradas y $(1, \alpha)$ es el vector de cointegración. [Note que no es único porque $(c, c\alpha)$ también es un vector de cointegración.]

Vector error-correction model (Engle and Granger, 1987)

Se puede construir

$$\Delta y_t = \beta\delta z_{t-1} + \eta_{1t}\Delta x_t = -\delta z_{t-1} + \eta_{2t}$$

donde $\delta = \frac{1-\rho}{\alpha-\beta}$, $z_t = y_t + \alpha x_t$, and $\eta_i, i = 1,2$ son variables aleatorias estacionarias que a la vez son combinaciones lineales de ζ_t y ξ_t.

- Esta representación es llamada de vector de correacción de errores, vector error-correction model (VECM).
- z_t representa desviaciones temporales del equilibrio, que se define como $z = 0$.
- z_t es entonces un error/residuo/shock en el sistema.
- Los coeficientes de z_{t-1} representan como las series se ajustan a desviaciones del equilibrio.
- Cuando $\rho \to 1$, el sistema se vuelve como dos paseos aleatorios correlacionados.

Vector error-correction model (Engle and Granger, 1987)

- Supongamos el modelo VAR

$$y_t = a_{11} y_{t-1} + a_{12} z_{t-1} + \varepsilon_{yt}$$
$$z_t = a_{21} y_{t-1} + a_{22} z_{t-1} + \varepsilon_{zt}$$

Usando operadores de rezagos lo podemos escribir como

$$(1 - a_{11} L) y_t - a_{12} L z_t = \varepsilon_{yt}$$
$$-a_{21} L y_t + (1 - a_{22} L) z_t = \varepsilon_{zt}$$

- Resolviendo tenemos que

$$y_t = \left((1 - a_{22} L) \varepsilon_{yt} + a_{12} \varepsilon_{zt} \right) / D$$
$$z_t = \left((1 - a_{11} L) \varepsilon_{zt} + a_{21} \varepsilon_{yt} \right) / D$$

con $D = (1 - a_{11} L)(1 - a_{22} L) - a_{12} a_{21} L^2$.

Vector error-correction model (Engle and Granger, 1987)

- Notar que ambas variables tienen la misma ecuación inversa característica: $(1-a_{11}L)(1-a_{22}L)-a_{12}a_{21}L^2=0$ o $\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=0$. Las raíces son (λ_1,λ_2).
- Para que las dos series estén cointegradas necesitamos que una raíz sea $\lambda_1=1$ y la otra $\lambda_2<1$. Resolviendo para que una sea $\lambda_1=1$ implica que $a_{11}=[(1-a_{22})-a_{12}a_{21}]/(1-a_{22})$. Mientras que $\lambda_2<1$ implica $a_{22}>-1$ y $a_{12}a_{21}+(a_{22})^2<1$.
- Reescribir el modelo como

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ \Delta z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}-1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \end{bmatrix}$$

Entonces podemos tener la forma de corrección de errores:

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ \Delta z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{12}a_{21}/(1-a_{22}) & a_{12} \\ a_{21} & -(1-a_{22}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \end{bmatrix}$$

o normalizando

$$\Delta y_t = \alpha_y(y_{t-1}-\beta z_{t-1})+\varepsilon_{yt}$$
$$\Delta z_t = \alpha_z(y_{t-1}-\beta z_{t-1})+\varepsilon_{zt}$$

donde $\alpha_y=-a_{12}a_{21}/(1-a_{22})$, $\beta=(1-a_{22})/a_{21}$, $\alpha_z=a_{21}$.

Vector error-correction model (Engle and Granger, 1987)

- En este caso, $y_{t-1} = \beta z_{t-1}$ es el equilibrio de largo plazo. Si estamos en el equilibrio entonces (y_t, z_t) cambia sólo en respuesta a los shocks $(\varepsilon_{yt}, \varepsilon_{zt})$.
- Notar que los modelos VEC son VAR con restricciones. Esto indica que es incorrecto correr un modelo VAR en diferencias (obviando el efecto de corrección de errores.
- Usemos la representación

$$\Delta x_t = \pi x_{t-1} + \varepsilon_t$$

donde $\pi = \begin{bmatrix} \alpha_y & -\alpha_y \beta \\ \alpha_z & -\alpha_z \beta \end{bmatrix}$.
- El rango de la matriz π nos indica la cantidad de relacionbes de cointegración. De hecho hay dos procedimientos para contrastar por cointegración: Engle-Granger estudian si los residuos de la relación de equilibrio son estacionarios. Johansen (1988) evalúa el rango de la matriz π.

Cointegración: tendencia

- Supongamos dos variables (y_y, z_t) tal que

$$y_t = \mu_{yt} t + e_{yt}$$

$$z_t = \mu_{zt} t + e_{zt}$$

donde μ_{it} es un paseo aleatorio representando la tendencia y e_{it} el componente estacionario de la variable i.

- Si (y_y, z_t) están cointegradas debe haber valores β_1 y β_2 tal que $\beta_1 y_t + \beta_2 z_t$ es estacionaria. Pero $\beta_1 y_t + \beta_2 z_t = (\beta_1 \mu_{yt} + \beta_2 \mu_{zt}) + (\beta_1 e_{yt} + \beta_2 e_{zt})$ con lo cual se debe dar que

$$(\beta_1 \mu_{yt} + \beta_2 \mu_{zt}) = 0$$

o

$$\mu_{yt} = -\beta_2/\beta_1 \mu_{zt}$$

Entonces si están cointegradas tienen que tener la misma tendencia.

Vector error-correction model (Engle and Granger, 1987)

Consideremos un modelo VAR con K variables y p lags,

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{y}_{t-1} + \ldots + \boldsymbol{A}_p \boldsymbol{y}_{t-p} + \boldsymbol{\epsilon}_t$$

Luego de algebra podemos escribir

$$\Delta \boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{\Pi} \boldsymbol{y}_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \boldsymbol{\Gamma}_i \Delta \boldsymbol{y}_{t-i} + \boldsymbol{\epsilon}_t$$

donde $\boldsymbol{\Pi} = \sum_{j=1}^{p} \boldsymbol{A}_j - \boldsymbol{I}_K$ y $\boldsymbol{\Gamma}_i = -\sum_{j=i+1}^{p} \boldsymbol{A}_j$.
Engle and Granger (1987) muestran que si las variables $\boldsymbol{y}_t$ son I(1) la matriz $\boldsymbol{\Phi}$ tiene rango (rank) $0 \leq r < K$, donde r es el número de vectores cointegrados linealmente independientes.

Nota: Si las variables están cointegradas, usar un modelo VAR en primeras diferencias es incorrecto porque omite el término rezagado $\boldsymbol{\Pi} \boldsymbol{y}_{t-1}$.

Vector error-correction model (Engle and Granger, 1987)

La matriz $\mathbf{\Pi}$ tiene un rol esencial en VECM.

- Si $rank(\mathbf{\Pi}) = 0$ entonces $\boldsymbol{y}_t$ no está cointegrado y se vuelve un modelo $VAR(p-1)$ estacionario.
- Si $rank(\mathbf{\Pi}) = K$ entonces $\boldsymbol{y}_t$ no contiene raíces unitarias. En este caso el modelo en diferencias no es necesario.
- Si $0 < rank(\mathbf{\Pi}) = r < K$ entonces $\mathbf{\Phi} = \alpha\beta'$ donde los vectores son $K \times r$ y $rank(\alpha) = rank(\beta) = r$. Esto significa que $\boldsymbol{y}_t$ esta cointegrado con r vectores de cointegración linealmente independientes.
- Johansen (1985,1988) nos da un contraste de cointegración analizando el rango de la matriz $\mathbf{\Phi}$.

STATA

- `varsoc x y z` Para seleccionar el número de rezagos/lags se puede usar los criterios de información que salen de un modelo VAR (en niveles).
- Usar el contraste de Johansen: `vecrank x y z, lags(p)`
- Estimar VECM: `vec x y z, lags(p)`
- `veclmar` /*para ver que los rediduos no estan autocorrelacionados*/
- `vecnorm` /*para chequear normalidad*/
- `vecstable`

  Para estabilidad del modelo se chequea que la cantidad de ecuaciones de cointegración es correcta y que las ecuaciones de cointegración son I(0). Con K variables endógenas y r ecuaciones de cointegración, este comando chequea que los restantes $K - r$ autovalores (eigenvalues) en módulo estan cerca/lejos de 1.

Lecturas sugeridas

- Enders, W. "Applied Econometric Series", caps. 5,6.
- Johnston, J. y Dinardo, J. "Econometric Methods", cap. 9.
- Lutkepohl, H. "New Introduction to Multiple Time Series Analysis".
- Tsay, R. "Analysis of Financial Time Series", cap. 8.