Modelos de vectores de corrección de errores VEC

Gabriel V. Montes-Rojas

Cointegración: definición

Si $\{y_t\}$, $\{x_t\}$ son dos procesos I(1), entonces en general $y_t - \beta x_t$ es un proceso I(1) para cualquier β. Sin embargo, si existe $\beta \neq 0$ tal que $y_t - \beta x_t$ es I(0), entonces (y, x) estan **cointegradas**.

En general para procesos multivariados si y_t es un vector de $K \times 1$ I(1) y existe un vector β tal que βy_t es I(0), entonces y_t es un vector de variables cointegradas con vector de cointegración β. Para un vector de dimensión K puede haber un máximo de $K - 1$ vectores de cointegración.

Cointegración: definición

- Cointegración se interpreta como la existencia de un equilibrio a largo plazo entre las variables (todas o algunas) no estacionarias. Este análisis se debe al trabajo de Engle y Granger (1987).
- El trabajo de Engle y Granger (1987) se concentra en variables que son integradas del mismo orden.

Cointegración: contrastes de hipótesis

¿Cómo contrastar por cointegración?

- H_0: y_t, x_t no están cointegradas.
- H_1: y_t, x_t están cointegradas.

1. Correr regresión de y_t en x_t.
2. Construir residuos $\hat{e}_t = y_t - \hat{\beta}x_t$.
3. Usar el contraste Dickey-Fuller (o Dickey-Fuller aumentado) a la serie $\{\hat{e}_t\}$, donde los valores críticos deben ser ajustados porque estamos estimando β.

Vector error-correction model (Engle and Granger, 1987)

Los modelos de VEC (vector error-correction) son una forma útil de trabajar con series de tiempo integradas. Consideremos dos series I(1) que estan cointegradas y los siguientes modelos:

$$y_t + \alpha x_t = \epsilon_t, \; \epsilon_t = \epsilon_{t-1} + \xi_t,$$

$$y_t + \beta x_t = \nu_t, \; \nu_t = \rho \nu_{t-1} + \zeta_t, \; |\rho| < 1$$

donde ξ_t y ζ_t son i.i.d. que están correlacionadas entre sí. Dado que ϵ_t es I(1), x_t y y_t también son I(1). La condición $|\rho| < 1$ implica que ν_t y $y_t + \beta x_t$ son I(0).
Así y_t y x_t están cointegradas y $(1, \beta)$ es el vector de cointegración.
[Note que no es único porque $(c, c\beta)$ también es un vector de cointegración.]

Vector error-correction model (Engle and Granger, 1987)

Tomando primeras diferencias de ambos modelos tenemos

$$\Delta y_t + \alpha \Delta x_t = \xi_t$$
$$\Delta y_t + \beta \Delta x_t = (\rho - 1)\nu_{t-1} + \zeta_t$$

Entonces, haciendo diferencias $(\beta - \alpha)\Delta x_t = (\rho - 1)\nu_{t-1} + \zeta_t - \xi_t$, tal que

$$\Delta x_t = \frac{\rho - 1}{\beta - \alpha}(y_{t-1} + \beta x_{t-1}) + \frac{\zeta_t - \xi_t}{\beta - \alpha} \equiv -\delta z_{t-1} + \eta_{2t}$$
$$\Delta y_t = -\alpha \frac{\rho - 1}{\beta - \alpha}(y_{t-1} + \beta x_{t-1}) + \left(\xi_t + \frac{\zeta_t - \xi_t}{\beta - \alpha}\right) \equiv \alpha\delta z_{t-1} + \eta_{2t}$$

donde $\delta = \frac{1-\rho}{\beta-\alpha}$, $z_t = y_{t-1} + \beta x_{t-1}$, and $\eta_i, i = 1, 2$ son variables aleatorias estacionarias que a la vez son combinaciones lineales de ζ_t y ξ_t.

Vector error-correction model (Engle and Granger, 1987)

- Esta representación es llamada de vector de corrección de errores, vector error-correction model (VECM).
- z_t representa desviaciones temporales del equilibrio, que se define como $z = 0$. z_t es entonces un error/residuo/shock en el sistema.
- Se interpreta como un nivel de equilibrio de **largo plazo**.
- Los coeficientes de z_{t-1} representan como las series se ajustan a desviaciones del equilibrio.
- Cuando $\rho \to 1$, el sistema se vuelve como dos paseos aleatorios correlacionados, pero no cointegrados.

Vector error-correction model (Engle and Granger, 1987)

- Supongamos el modelo VAR

$$y_t = a_{11} y_{t-1} + a_{12} z_{t-1} + w_{yt}$$
$$z_t = a_{21} y_{t-1} + a_{22} z_{t-1} + w_{zt}$$

Usando operadores de rezagos lo podemos escribir como

$$(1 - a_{11} L) y_t - a_{12} L z_t = w_{yt}$$
$$-a_{21} L y_t + (1 - a_{22} L) z_t = w_{zt}$$

- Resolviendo tenemos que

$$y_t = ((1 - a_{22} L) w_{yt} + a_{12} w_{zt}) / D$$
$$z_t = ((1 - a_{11} L) w_{zt} + a_{21} w_{yt}) / D$$

con $D = (1 - a_{11} L)(1 - a_{22} L) - a_{12} a_{21} L^2$.

Vector error-correction model (Engle and Granger, 1987)

- Notar que ambas variables tienen la misma ecuación inversa característica: $(1 - a_{11}L)(1 - a_{22}L) - a_{12}a_{21}L^2 = 0$ o $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$. Las raíces son (λ_1, λ_2).
- Para que las dos series estén cointegradas necesitamos que una raíz sea $\lambda_1 = 1$ y la otra $\lambda_2 < 1$. Resolviendo para que una sea $\lambda_1 = 1$ implica que $a_{11} = [(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21}]/(1 - a_{22})$. Mientras que $\lambda_2 < 1$ implica $a_{22} > -1$ y $a_{12}a_{21} + (a_{22})^2 < 1$.
- Reescribir el modelo como

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ \Delta z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{yt} \\ w_{zt} \end{bmatrix}$$

Entonces podemos tener la forma de corrección de errores:

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ \Delta z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{12}a_{21}/(1 - a_{22}) & a_{12} \\ a_{21} & -(1 - a_{22}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{yt} \\ w_{zt} \end{bmatrix}$$

o normalizando

$$\Delta y_t = \alpha_y(y_{t-1} - \beta z_{t-1}) + w_{yt}$$
$$\Delta z_t = \alpha_z(y_{t-1} - \beta z_{t-1}) + w_{zt}$$

donde $\alpha_y = -a_{12}a_{21}/(1 - a_{22})$, $\beta = (1 - a_{22})/a_{21}$, $\alpha_z = a_{21}$.

Vector error-correction model (Engle and Granger, 1987)

- En este caso, $y_{t-1} = \beta z_{t-1}$ es el equilibrio de largo plazo. Si estamos en el equilibrio entonces (y_t, z_t) cambia sólo en respuesta a los shocks (w_{yt}, w_{zt}).
- Notar que los modelos VEC son VAR con restricciones. Esto indica que es incorrecto correr un modelo VAR en diferencias (obviando el efecto de corrección de errores que es distintivo de los VEC).
- Usemos la representación

$$\Delta x_t = \pi x_{t-1} + w_t$$

donde $\pi = \begin{bmatrix} \alpha_y & -\alpha_y \beta \\ \alpha_z & -\alpha_z \beta \end{bmatrix}$.

- El rango de la matriz π nos indica la cantidad de relaciones de cointegración. De hecho hay dos procedimientos para contrastar por cointegración: Engle-Granger estudian si los residuos de la relación de equilibrio son estacionarios. Johansen (1988) evalúa el rango de la matriz π.

Cointegración: tendencia

- Supongamos dos variables (y_t, z_t) tal que

$$y_t = \mu_{yt} t + e_{yt}$$

$$z_t = \mu_{zt} t + e_{zt}$$

donde μ_{it} es un paseo aleatorio representando la tendencia y e_{it} el componente estacionario de la variable i.

- Si (y_t, z_t) están cointegradas debe haber valores β_1 y β_2 tal que $\beta_1 y_t + \beta_2 z_t$ es estacionaria. Pero $\beta_1 y_t + \beta_2 z_t = (\beta_1 \mu_{yt} + \beta_2 \mu_{zt}) + (\beta_1 e_{yt} + \beta_2 e_{zt})$ con lo cual se debe dar que

$$(\beta_1 \mu_{yt} + \beta_2 \mu_{zt}) = 0$$

o

$$\mu_{yt} = -\beta_2/\beta_1 \mu_{zt}$$

Entonces si están cointegradas tienen que tener la misma tendencia.

Vector error-correction model (Engle and Granger, 1987)

Consideremos un modelo VAR con K variables y p lags,

$$y_t = A_1 y_{t-1} + ... + A_p y_{t-p} + u_t$$

Luego de algebra podemos escribir

$$\Delta y_t = \Pi y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i \Delta y_{t-i} + u_t$$

donde $\Pi = \sum_{j=1}^{p} A_j - I_K$ y $\Gamma_i = -\sum_{j=i+1}^{p} A_j$.
Engle and Granger (1987) muestran que si las variables y_t son I(1) la matriz Π tiene rango (rank) $0 \leq r < K$, donde r es el número de vectores cointegrados linealmente independientes.

Nota: Si las variables están cointegradas, usar un modelo VAR en primeras diferencias es incorrecto porque omite el término rezagado Πy_{t-1}.

Vector error-correction model (Engle and Granger, 1987)

La matriz Π tiene un rol esencial en VECM.

- Si $rank(\Pi) = 0$ entonces y_t no está cointegrado y se vuelve un modelo $VAR(p-1)$ estacionario en diferencias.
- Si $rank(\Pi) = r = K$ entonces y_t no contiene raíces unitarias, o sea, el modelo en niveles es estable. En este caso el modelo en diferencias no es necesario.
- Si $0 < rank(\Pi) = r < K$ entonces $\Pi = \alpha\beta'$ donde los vectores son $K \times r$ y $rank(\alpha) = rank(\beta) = r$. Esto significa que y_t esta cointegrado con r vectores de cointegración linealmente independientes.
  En este caso podemos escribir,
  $$\Delta y_t = \alpha\beta' y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i \Delta y_{t-i} + u_t,$$
  que se define como VECM porque incluye implícitamente el termino de corrección de errores.
- Johansen (1985,1988) nos da un contraste de cointegración analizando el rango de la matriz Π.

Vector error-correction model (Engle and Granger, 1987)

- El modelo en niveles se puede recuperar como

$$A_1 = \Pi + I_K + \Gamma_1,$$

$$A_i = \Gamma_i - \Gamma_{i-1},\ i = 2, ..., p-1,$$

$$A_p = -\Gamma_{p-1}.$$

- $\Pi = \alpha\beta'$ no es único. Una normalización conveniente es $\beta = \begin{bmatrix} I_r \\ \beta_{(K-r)} \end{bmatrix}$. Entonces si el rango de cointegración es 1, $\beta = (1, \beta'_{(K-1)})'$ tal que

$$y_{1t} = -\beta_{(K-1),1} y_{2t} - ... - \beta_{(K-1),K-1} y_{Kt} + z_t,$$

donde $z_t \sim I(0)$.
- Si hay elementos en y_t que son $I(0)$ en niveles, entonces tenemos una relación de cointegración para cada componente estacionario de y_t. Por ello el rango de cointegración tiene que ser al menos tanto como la cantidad de variables $I(0)$.

STATA

- `varsoc x y z` Para seleccionar el número de rezagos/lags se puede usar los criterios de información que salen de un modelo VAR (en niveles).
- Usar el contraste de Johansen: `vecrank x y z, lags(p)`
- Estimar VECM: `vec x y z, lags(p) rank(r)`
- `veclmar` /*para ver que los rediduos no estan autocorrelacionados*/
- `vecnorm` /*para chequear normalidad*/
- `vecstable`

  Para estabilidad del modelo se chequea que la cantidad de ecuaciones de cointegración es correcta y que las ecuaciones de cointegración son I(0). Con K variables endógenas y r ecuaciones de cointegración, este comando chequea que los restantes $K - r$ autovalores (eigenvalues) en módulo estan cerca/lejos de 1.

Lecturas sugeridas

- Enders, W. "Applied Econometric Time Series", caps. 5,6.
- Johnston, J. y Dinardo, J. "Econometric Methods", cap. 9.
- Kilian, L. y Lütkepohl, H. "Structural Vector Autoregressive Analysis", caps. 2,3,4,7,8.
- Lütkepohl, H. "New Introduction to Multiple Time Series Analysis".
- Tsay, R. "Analysis of Financial Time Series", cap. 8.