Series de tiempo II

Raíces unitarias y series no estacinarias

Gabriel V. Montes-Rojas

Paseo aleatorio (random walk)

- Consideremos el proceso

$$y_t = y_{t-1} + e_t, t = 1, 2, ..., e_t \sim i.i.d.(0, \sigma_e^2)$$

Esto es un **paseo aleatorio**. Entonces,

$$E[y_{t+h}|y_t] = y_t, \forall h \geq 1$$

Esto significa que el proceso no revierte a la media y por lo tanto no es predecible. [En contraste con AR(1) $E[y_{t+h}|y_t] = \phi_1^h y_t \to 0$ cuando $h \to \infty$ (revierte a la media).]

- Este es un caso especial de un proceso de **raíz unitaria** porque $\phi_1 = 1$ en un AR(1).

Paseo aleatorio

Un paseo aleatorio se puede escribir como

$$y_t = e_t + e_{t-1} + \ldots + e_1 + y_0$$

Entonces,

$$E[y_t] = E[e_t] + E[e_{t-1}] + \ldots + E[e_1] + E[y_0] = E[y_0]$$

$$Var[y_t] = Var[e_t] + Var[e_{t-1}] + \ldots + Var[e_1] = t\sigma_e^2$$

(note que la varianza $\rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$)

$$Cov[y_t, y_{t-k}] = (t-k)\sigma_e^2$$

¿Como simular paseos aletorios en STATA?

```
clear
global T=1000
set obs $T
gen t=_n

forvalues j=1(2)5 {
/*estamos generando 5 series al mismo tiempo*/
gen et`j'=rnormal(0,1)
gen yt`j'=.
replace yt`j'=et`j' in 1
global rho=1
forvalues i=2(1)$T {
quietly replace yt`j'=$rho*yt`j'[`i'-1]+et`j'[`i'] in `i'
}
}
line yt* t
```

Paseo aleatorio con constante (drift)

Consideremos el proceso

$$y_t = \mu + y_{t-1} + e_t, t = 1, 2, ..., e_t \sim i.i.d.(0, \sigma_e^2)$$

Este se llama **paseo aleatorio con constante** (drift). Note que μ es en realidad la tendencia de la serie:

$$y_t = t\mu + e_t + e_{t-1} + ... + e_1 + y_0$$

Además,

$$E[y_{t+h}|y_t] = h\mu + y_t$$

$$Var[y_t] = Var[e_t] + Var[e_{t-1}] + ... + Var[e_1] = t\sigma_e^2$$

¿Cómo simular paseos aleatorios con constante en STATA?

```
clear
global T=1000
set obs $T
gen t=_n

forvalues j=1(2)5 {
gen et`j'=rnormal(0,1)
gen yt`j'=.
replace yt`j'=et`j' in 1
global rho=1
global mu=1
forvalues i=2(1)$T {
quietly replace yt`j'=$mu+$rho*yt`j'[`i'-1]+et`j'[`i'] in `i'
}
}
line yt* t
```

Orden de integración de una serie

Las series débilmente dependientes se definen como **integradas de orden cero**, *o* **I(0)**. *Esto significa que se le puede aplicar una regresión y hacer inferencia con esos resultados.*
Procesos de raíces unitarias son procesos **integrados de orden uno**, *o* **I(1)**. *La primera diferencia de estos procesos es I(0).*
Una serie temporal y_t *es* $ARIMA(p, 1, q)$ *(i:integrada) si la diferencia* $c_t = y_t - y_{t-1}$ *es un proceso* $ARMA(p, q)$.

Contrastes de hipótesis para raíces unitarias

- Consideremos un modelo AR(1):

$$y_t = \rho y_{t-1} + u_t$$

  con $E[e_t|y_{t-1}, y_{t-1}, ..., y_0] = 0$, $e_t \sim N(0, \sigma^2)$
  Un contraste de raíz unitaria es $H_0 : \rho = 1$ contra $H_1 : \rho < 1$. Sin embargo, bajo la hipótesis nula, la distribución de $\hat{\rho}$ no es estándar, o sea no sigue una distribución t.
- Supongamos el estimador $\hat{\rho}_T = \frac{\sum y_t y_{t-1}}{\sum y_{t-1}^2}$. Si $\rho < |1|$, entonces $\sqrt{T}(\hat{\rho}_T - \rho) \xrightarrow{d} N(0, (1 - \sigma^2))$.
- Pero si $\rho = 1$, entonces $\sqrt{T}(\hat{\rho}_T - \rho) \xrightarrow{p} 0$.
- Necesitamos entonces estandarizar por T para obtener $T(\hat{\rho}_T - \rho)$ (ver Hamilton, cap.17).

Contrastes de hipótesis para raíces unitarias

- **Contraste de Dickey-Fuller**
  Transformar el modelo en
  $$\Delta y_t = \alpha + \theta y_{t-1} + e_t$$
  Un contraste de raíz unitaria se construye como $H_0 : \theta = 0$ contra $H_1 : \theta < 0$.
- **Contraste de Dickey-Fuller aumentado**
  $$\Delta y_t = \alpha + \theta y_{t-1} + \gamma_1 \Delta y_{t-1} + e_t$$
- **Dickey-Fuller con tendencia**
  $$\Delta y_t = \alpha + \theta y_{t-1} + \delta t + e_t$$
- En STATA:
  http://www.stata.com/help.cgi?dfuller
  http://www.stata.com/help.cgi?pperron

Tendencia

- Muchas series de tiempo contienen **tendencia**, o sea aumentan o decrecen en el tiempo. Ej: precios, PBI.
- Si se ignora la tendencia en ciertas variables se obtiene una relación espúrea entre variables, es decir, que viene dada por la tendencia misma y no por la relación de causalidad entre las variables.
- Consideremos el siguiente ejemplo: $y = \alpha t + u_t$, $x = \beta t$, donde u son v.a. independientes (ej. N(0,1)). Asumiendo que $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, las dos variables crecen en el tiempo. ¿Pero hay una relación enre ellas?
- Supongamos la regresión $y_t = \delta x_t + w_t$, entonces $\hat{\delta} = \frac{\sum_{t=1}^{T} x_t y_t}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2}$.

$$E[\hat{\delta}] = E\left[\frac{\sum_{t=1}^{T}(\beta t + u_t)(\alpha t)}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2}\right] = \alpha\beta E\left[\frac{\sum_{t=1}^{T} t^2}{\beta \sum_{t=1}^{T} t^2}\right] = \alpha > 0$$

Modelo MCO con tendencia determinística

(Hamilton Cap.16)

- Supongamos el modelo

$$y_t = \alpha + \delta t + \epsilon_t, \quad \epsilon \sim N(0, \sigma^2), \quad t = 1, 2, ..., T$$

- Usando el algebra de MCO tenemos que

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_T - \alpha \\ \hat{\delta}_T - \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum 1 & \sum t \\ \sum t & \sum t^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum \epsilon_t \\ \sum t\epsilon_t \end{bmatrix}$$

$\sum t = T(T+1)/2$, $\sum t^2 = T(T+1)(2T+1)/6$.

- Notar que en MCO tenemos el supuesto $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t x_t' \to C$ donde $C < \infty$. Sin embargo, si $x_t = [1 \;\; t]$, la matriz diverge. Por lo tanto $\sqrt{T}\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_T - \alpha \\ \hat{\delta}_T - \delta \end{bmatrix}$ diverge a infinito.
- Entonces tenemos que usar distintas estandarizaciones para α y δ.

$$\begin{bmatrix} \sqrt{T}(\hat{\alpha}_T - \alpha) \\ T^{3/2}\hat{\delta}_T - \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{T} & 0 \\ 0 & T^{3/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum 1 & \sum t \\ \sum t & \sum t^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum \epsilon_t \\ \sum t\epsilon_t \end{bmatrix}$$

Tendencia

- Hay varios tipos de tendencia determinística. Supongamos que u_t es una serie de ruido blanco.
- Lineal: $y_t = \delta t + u_t$
- Exponencial: $ln(y_t) = \delta t + u_t$
- Cíclica: $y_t = rcos(\omega t + \theta) + u_t$.
  En este caso: r es la amplitud, ω es la frecuencia, con ciclo periodo $\frac{2\pi}{\omega}$, θ es el 'phase shift'.
  En general,

$$y_t = \sum_{i=1}^{k} r_i cos(\omega_i t + \theta_i) + u_t = \sum_{i=1}^{k} [A_i cos(\omega_i t) + B_i sin(\omega_i t)] + u_t$$

  con $A_i = r_i cos(\theta_i)$ y $B_i = r_i sin(\theta_i)$.

Estacionalidad

Estacionalidad es un comportamiento cíclico que ocurre en forma regular de acuerdo al calendario.

- Tipos de estacionalidad: trimestral, mensual, semanal, diario.
- Ej.: Los precios de las casas son influenciados por el tiempo (en épocas de frío o falta de luz hay pocas visitas para comprar una casa).
- Ej.: Precios de los juguetes para niños, más caros en Navidad.
- Ej.: Pasajes aéreos.
- En el caso trimestral:

$$y_t = \beta_0 + \delta_2 Q_{2t} + \delta_3 Q_{3t} + \delta_4 Q_{4t} + \beta_1 x_t + u_t$$

donde Q_2, Q_3, Q_4 son variables dummy (¿Por qé Q_1 es excluida?)

Estacionalidad

- El operador $\Delta_s = (1 - L^s)$ se define como el operador de diferencias estacionales, tal que $\Delta_s x_t = x_t - x_{t-s}$.
- Supongamos que la serie x_t tiene datos trimestrales y estacionalidad trimestral. Entonces se debería usar Δ_4.
- Esto da lugar a los llamados modelos de estacionalidad multiplicativa: $(1 - L^s)(1 - L)x_t = (1 - \theta L^s)(1 - \Theta L)a_t$, donde a_t es ruido blanco, $|\theta| < 1, |\Theta| < 1$.

Modelo de componentes

Supongamos el modelo

$$y_t = x_t + w_t + u_t$$

- x_t: componente de tendencia
- w_t: componente de estacionalidad
- u_t: componente irregular

Modelo de filtros

- Filtros lineales se definen como una combinación lineal de señales:

$$y_t = \psi(L)x_t = \sum_j \psi_j x_{t-j}$$

  La secuencia $\psi(L) = \{... + \psi_{-1}L^{-1} + \psi_0 + \psi_1 L + ...\}$ es el filtro lineal.
- $\psi(L)$ puede ser finito o infinito. Si es finito se define como un filtro moving average. Cuando todos los pesos del filtro son no negativos entonces de define como causal o backward-looking.
- En STATA ver el comando `tssmooth`

Modelo de filtros

- El filtro de series de tiempo más conocido es el de Hodrick-Prescott, "HP filter".

$$min_{\tau_t} \sum_{t=1}^{T} \left[(x_t - \tau_t)^2 + \lambda ((\tau_{t+1} - \tau_t) - (\tau_t - \tau_{t-1}))^2 \right]$$

  - τ_t: tendencia
  - $z_t = x_t - \tau_t$: business cycle
  - λ: parámetro de penalización de fluctiaciones

- En STATA ver el comando `hsprescott` (hay que instalarlo)
- `http://repec.org/nasug2006/TSFiltering_beamer.pdf`