La tecnología

Gabriel Montes-Rojas
Universidad de Buenos Aires
Email: gabriel.montes@fce.uba.ar
Web: http://gabrielmontes.com.ar

Producción

¿Cómo modelar la producción?

- Un plan de producción es una lista de producciones netas. Una firma/empresa puede usar n bienes, que pueden servir a la vez de factores.
- Supongamos $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ donde $\boldsymbol{y} = \{y_1, ..., y_n\}$.
- Definamos el conjunto de posibilidades de producción $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ que describe todas las combinaciones de factores y productos que son tecnológicamente viables.
- En general podemos separar entre factores de producción, $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ y de productos $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}$.

Producción

¿Cómo modelar la producción?

(Conjunto de cantidades necesarias de factores)

$$V(y) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+ : (y, -\boldsymbol{x}) \in \mathcal{P}\}$$

(Isocuanta)

$$Q(y) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+ : \boldsymbol{x} \in V(y), \boldsymbol{x} \notin V(y') \; si \; y' > y\}$$

(Función de producción)

$$f(\boldsymbol{x}) = \{y \in \mathbb{R} : \max_y (y, \boldsymbol{x}) \in \mathcal{P}\}$$

$$f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$$

Tecnología Cobb-Douglas

Charles W. Cobb and Paul H. Douglas (1928). "A Theory of Production" American Economic Review, 18(1), 139-165.

- La función fue primero propuesta por Wicksell.
- $P = \{(y, -x_1, -x_2) \in \mathbb{R}^3 : y \leq x_1^a x_2^b\}$
- $V(y) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 : y \leq x_1^a x_2^b\}$
- $Q(y) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 : y = x_1^a x_2^b\}$
- $f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$, $a, b > 0$

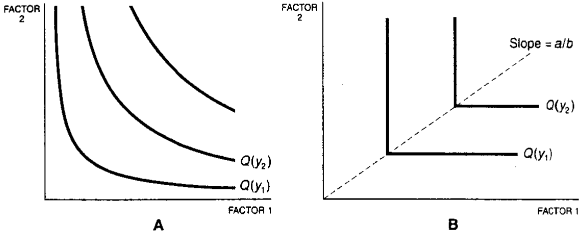
Tecnología Leontief

- $P = \{(y, -x_1, -x_2) \in \mathbb{R}^3 : y \leq \min(ax_1, bx_2)\}$
- $V(y) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ : y \leq \min(ax_1, bx_2)\}$
- $Q(y) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ : y = \min(ax_1, bx_2)\}$
- $f(x_1, x_2) = \min(ax_1, bx_2),\ a, b > 0$

Tecnología de sustitutos perfectos

- $P = \{(y, -x_1, -x_2) \in \mathbb{R}^3 : y \leq ax_1 + bx_2\}$
- $V(y) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ : y \leq ax_1 + bx_2)\}$
- $Q(y) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ : y = ax_1 + bx_2\}$
- $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2,\ a, b > 0$

Funciones de producción



Cobb-Douglas and Leontief technologies. Panel *A* depicts the general shape of a Cobb-Douglas technology, and panel *B* depicts the general shape of a Leontief technology.

Monotonicidad

(Monotonicidad)

Si $\boldsymbol{x} \in V(y)$ *y* $\boldsymbol{x}' \geq \boldsymbol{x}$, *entonces* $\boldsymbol{x}' \in V(y)$.
Si $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in V(y)$ *y* $\boldsymbol{x}' \geq \boldsymbol{x}$, *entonces* $f(\boldsymbol{x}') \geq f(\boldsymbol{x})$.

Para $j = 1, 2, ..., m$ insumos tenemos y funciones de producción diferenciables,

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{x_j} \geq 0$$

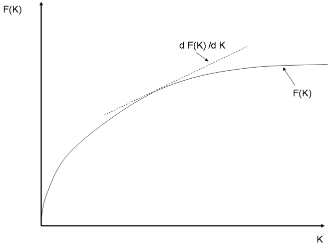
Convexidad

(Convexidad)

- *$V(y)$ es un conjunto convexo si $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in V(y)$, entonces $t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{x}' \in V(y)$ para $t \in [0,1]$.*
- *Si Y es un conjunto de producción convexo, entonces también lo es el conjunto de cantidades necesarias de factores.*
- *$V(y)$ es un conjunto convexo si y sólo si la función de producción es cuasi-cóncava.*

La función de producción neoclásica

Funciones de producción que satisfacen monotonicidad y son cóncavas son las típicas funciones de producción neoclásica.
Ley del producto marginal decreciente, David Ricardo.



Modelo ricardiano

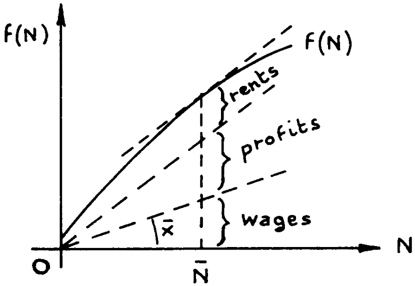


FIG. I.3. Distribution of income in the Ricardian system (in terms of total product)

Modelo ricardiano

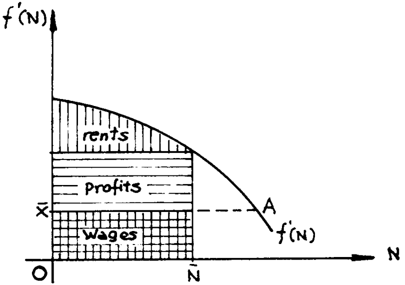


FIG. I.4. Distribution of income in the Ricardian system (in terms of marginal product)

No convexidad

Ejemplo 1: Trampa de pobreza

- Supongamos que $f(x) = \max\{x^a, x^b - c\}$ con $a, b, c > 0$ y $a < b$.
- Es una función que tiene dos partes, donde la primera es menos productiva que la segunda.
- Existe un nivel (umbral) de x^* tal que $x^{*a} = x^{*b} - c$ con $x^a > x^b - c$ para $x < x^*$ y $x^a < x^b - c$ para $x > x^*$.
- Mostrar que la tecnología no es convexa.

Ejemplo 2: $f(x) = \sqrt{ax_1^2 + bx_2^2}$ con $x_1, x_2 \geq 0$.

Rendimientos a escala

Rendimientos a escala: *Se refiere a que pasa con el producto cuando* **todos** *los insumos son re-escalados (aumentan o dismunuyen) en la misma proporción.*

Supongamos $\lambda > 0$*:*
Rendimientos constantes a escala (RCE): $\lambda y = f(\lambda \boldsymbol{x})$.
Rendimientos decrecientes a escala: $\lambda y > f(\lambda \boldsymbol{x})$.
Rendimientos crecientes a escala: $\lambda y < f(\lambda \boldsymbol{x})$.

Tecnologías homogéneas y homotéticas

- Una función f es homogénea de grado k si $f(t\boldsymbol{x}) = t^k f(\boldsymbol{x})$. Notar the RCE es equivalente a homogénea de grado 1.
- Si es f es homogénea de grado k, entonces $\partial f/\partial x$ es homogénea de grado $k-1$. Prueba: $f(t\boldsymbol{x}) = t^k f(\boldsymbol{x})$. Entonces, $\partial f(t\boldsymbol{x})/\partial(t\boldsymbol{x})t = t^k \partial f(\boldsymbol{x})/\partial \boldsymbol{x}$ para todo $t > 0$. Si dividimos ambos lados por t tenemos $f'(t\boldsymbol{x}) = \partial f(t\boldsymbol{x})/\partial(t\boldsymbol{x}) = t^{k-1} f'(\boldsymbol{x})$.
- Notar que si f es homogénea de grado 1, entonces el ratio de derivadas (ej. RTS) es homog. de grado 0. Es decir, no cambia con la escala.
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una transformación monónotona positiva si $x > y$ implica que $g(x) > g(y)$. Una transformación homotética es una transformación monńotona de una función homog. de grado 1. O sea, $f(\boldsymbol{x})$ es homotética si $f(\boldsymbol{x}) = g(h(\boldsymbol{x}))$ donde g es func. monótona y h homog. de grado 1. Ej: $g(x) = ln(x)$.

Rendimientos a escala

Teorema de Euler: Tomemos una función $y = f(\boldsymbol{x})$ homogénea de grado 1. Entonces, $y = \sum_{j=1}^{m} x_j \partial f(\boldsymbol{x})/\partial x_j$. Prueba: $\lambda y = f(\lambda \boldsymbol{x})$, tomar derivadas con respecto a λ y evaluar en $\lambda = 1$.

Supongamos una función de producción de PIB, $Y = F(K, L)$, con RCE. Usando $\lambda = 1/L$, tenemos

$$\lambda Y = F(\lambda K, \lambda L) = Y/L \equiv y = F(K/L, 1)/L \equiv f(k),$$

donde $y \equiv Y/L$ (PBI per capita), $k \equiv K/L$ (stock de capital per capita). Por otro lado,

$$Y = F_L \times L + F_K \times K = w \times L + r \times K.$$

La anterior ecuación es central para entender la teoría de la distribución marginalista.

Relación técnica de sustitución

(RTS)

Relación en que se sustituye un insumo por otro para mantener la misma cantidad de producción y.
Supongamos $y = f(x_1, x_2)$. Hagamos total diferenciación,

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2,$$

entonces si mantenemos el producto constante $dy = 0$, obtenemos

$$RTS = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_2}}$$

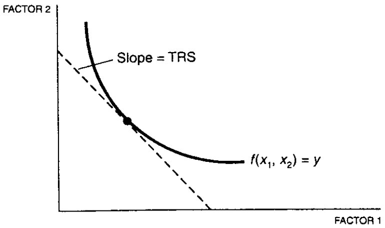
Relación técnica de sustitución

(Elasticidad de sustitución)

$$\sigma = \frac{dln(x_2/x_1)}{dRTS}$$

Ej. Cobb-Douglas. $f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$. $RTS = -\frac{a}{b}\frac{x_2}{x_1}$. $\sigma = 1$.
Ej. Leontief.
Ej. Sustitutos perfectos.

RTS



The technical rate of substitution. The technical rate of substitution measures how one of the inputs must adjust in order to keep output constant when another input changes.

Función CES (constant elasticity of substitution)

La función CES (constant elasticity of substitution) fue introducida por primera vez en el artículo Arrow, K.J., H.B. Chenery, B.S. Minhas and R.M. Solow (1961), "Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency," *Review of Economics and Statistics* 43(3), 225–250.

CES: $f(x_1, x_2) = [a_1 x_1^{\rho} + a_2 x_2^{\rho}]^{\frac{1}{\rho}}$, con parámetros $a_1 \in \mathbb{R}^+$, $a_2 \in \mathbb{R}^+$ y $\rho \in (-\infty, 1]$. .
$RTS = -(\frac{x_1}{x_2})^{\rho-1}$. $\sigma = \frac{1}{1-\rho}$.

- Calcular la RTS y la elasticidad de sustitución. ¿De qué depende?
- ¿Rendimientos a escala?
- Analizar los siguientes casos particulares: Cobb-Douglas $\rho = 0$. Sustitutos perfectos $\rho = 1$. Leontief $\rho = -\infty$.

Modelo de 2 productos y 1 insumo

- Supongamos un conjunto de posibilidades de producción del tipo $(y_1, y_2, -x) \in \mathbb{R}^3_+$, donde $y_1 = f_1(x) = x^a$, $y_2 = f_2(x) = x^b$, $0 < a \leq b < 1$, son las funciones de producción de cada bien.
- Construir el conjunto de cantidades de factores $V(y_1, y_2)$ y la frontera de producción.
- Si asumimos que $\bar{x}$ es el total disponible del factor, tal que $x_1 + x_2 \leq \bar{x}$, entonces $f_1(x_1) = x_1^a$, $f_2(\bar{x} - x_1) = (\bar{x} - x_1)^b$. Por otra parte,

$$V(y_1, y_2) = \{x \geq 0 : y_2 \leq (\bar{x} - y_1^{1/a})^b\}$$

- Graficar la frontera de producción: $y_2 = (\bar{x} - y_1^{1/a})^b$. ¿Qué caracteriza la curva en el plano (y_1, y_2)?

Modelo de 2 productos y 2 insumos

- Supongamos un modelo con dos productos (y_1 e y_2) y dos insumos (x_1 y x_2). La cantidad de los insumos está fija, ($\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$)
- Supongamos un conjunto de posibilidades de producción del tipo $(y_1, y_2, -x_1, -x_2) \in \mathbb{R}^4_+$, donde $y_1 = f_1(x_{11}, x_{12}) = A_1 x_{11}^a x_{12}^b$, $y_2 = f_2(x_{21}, x_{22}) = A_2 x_{21}^c x_{22}^d$, son las funciones de producción de cada bien.
- Construir el conjunto de cantidades de factores $V(y_1, y_2)$ y la frontera de producción. Graficar la frontera de producción en el plano (y_1, y_2). ¿Qué caracteriza la curva en el plano (y_1, y_2)? En particular determinar condiciones para que la curva tenga pendiente negativa y sea cóncava/convexa.

Nota: Si asumimos que (x_1, x_2) es el total disponible de los factores, tal que $x_{1j} + x_{2j} \leq \bar{x}_j$, $j = 1, 2$, tenemos 4 ecuaciones (2 func.prod., 2 suma uso de factores) y 6 incógnitas $(y_1, y_2, x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22})$. La condición adicional sale por usar $RTS_1 = \frac{ax12}{bx11}$ y $RTS_2 = \frac{cx22}{dx21}$. Pensar en una Caja de Edgeworth con isocuantas.