Teoría marxista

Gabriel Montes-Rojas
Universidad de Buenos Aires
Email: gabriel.montes@fce.uba.ar
Web: http://gabrielmontes.com.ar

Michio Morishima, "Marx's economics. A dual theory of value and growth"

Michio Morishima

MARX'S ECONOMICS

A DUAL THEORY
OF VALUE AND GROWTH

CAMBRIDGE
AT THE UNIVERSITY PRESS
1973

La centralidad de la teoría del valor en Marx

- Un punto central de la teoría del valor trabajo marxista es que las formas de la ganancia (beneficio, renta, interés) son el resultado de la explotación del trabajador, extracción de plusvalía.
- Marx y la economía marxista construyen un marco conceptual para explicar el sistema capitalista a partir de la relación entre **valores** (trabajo "abstracto" socialmente necesario) y **precios** (expresiones monetarios de las mercancías, en las que se expresan el resto de los elementos centrales de capitalismo: salarios, ganancias, etc.).
- El problema de la transformación de valores a precios se refiere a la imposibilidad de expresar fenómenos en precios a partir de usar únicamente los valores. En el proceso de "transformar" (=igualar, asignar) los valores a los precios se producen ciertas **imposibilidades**.

El modelo marxista en valores

- Definamos $d = [0 \ \ldots \ 0 \ d_1 \ d_2 \ \ldots d_h]'$ como el vector de h mercancías que entran en la canasta del salario real. El salario nominal se puede definir implícitamente como $w = \boldsymbol{pd}$. Al igual que Ricardo, Marx asume un salario de subsistencia dado.
- Para hallar los valores definamos $w^* = 1$ como medida del trabajo, y obtenemos el resultado que define los **valores trabajo** (llamados también coeficientes de trabajo verticalmente integrados),

$$\boldsymbol{vA} + \boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{v}, \Rightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}.$$

  Notar que si $\boldsymbol{A}$ es productiva, entonces los valores son positivos.
- Definamos ahora $\boldsymbol{vd} = \delta w^*$ donde $\delta \leq 1$. Es decir, los trabajadores reciben una porción δ menor al valor producido por ellos. El resto, $(1 - \delta)$ es trabajo no pagado.
- Entonces tenemos $\boldsymbol{vA} + \frac{1}{\delta}\boldsymbol{vd\ell} = \boldsymbol{v}$ o $\boldsymbol{vA} + \boldsymbol{vd\ell} + \frac{1-\delta}{\delta}\boldsymbol{vd\ell} = \boldsymbol{v}$.
- Marx llama a $\sigma = \frac{1-\delta}{\delta}$ a la **tasa de plusvalía**.
- Otra forma de ver el modelo es entonces,

$$\boldsymbol{vA} + (1 + \sigma)\boldsymbol{vd\ell} = \boldsymbol{v}.$$

- Por otro lado, definamos, $\boldsymbol{vd\ell}$ como el **valor de la fuerza de trabajo**.

El modelo marxista en valores

- La misma solución del vector de valores $\boldsymbol{v}$ se puede obtener si agregamos la ecuación $(1+\sigma)\boldsymbol{vd} = w^* = 1$.
- En términos marxistas podemos escribir, $VALOR\ TOTAL = C + V + S$,

$$\boldsymbol{vx} = \boldsymbol{vAx} + \boldsymbol{vd\ell x} + \sigma\boldsymbol{vd\ell x},$$

donde C : capital constante, V : capital variable y S : plusvalía. $S/(C+V)$ se define como la tasa de beneficios en valores.
- La condición necesaria para la existencia de una solución que no sea cero es

$$det\left[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} - (1+\sigma)\boldsymbol{d\ell}\right] = 0.$$

Si resolvemos para σ podemos entonces obtener los **valores**. La matriz $\boldsymbol{d\ell}$ es el producto de dos vectores, entonces tiene rango 1 (máx. un vector linealmente dependiente), entonces σ tiene máx. una solo solución no cero. Por otro lado podemos escribir,

$$det\left[\boldsymbol{I} - (1+\sigma)\boldsymbol{d\ell}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\right] = 0.$$

($\boldsymbol{d\ell}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$ se define como los coeficientes verticalmente integrados de consumo de subsistencia.)

Marx en sus propias palabras

Para el capitalista, la ganancia "(...) sale del proceso productivo llevado a cabo con el capital, entonces sale del capital mismo, porque está ahí luego del proceso de producción, mientras que no lo está antes del mismo. Y en cuanto al capital consumido en la producción, la plusvalía parece aparecer igualmente de los distintos elementos de valor que consistent en medios de producción y trabajo. Estos elementos contribuyen por igual en la formación del precio de costo. Todos ellos agregan valor al producto obtenido como capital adelantado, y no se diferencian como constante y variable." (Marx, 1894, Capital, Vol. III, ch.1, p.23)

"Al capitalista no le importa si la ganancia se obtiene del capital adelantado como capital variable o capital constante, o si invierte en maquinaria y materia prima para explotar al trabajo. Aunque es solo la parte variable la que crea plusvalor, esto solo se da si las otras partes, las condiciones de la producción, también constituyen un gasto por adelantado. (...) [el capitalista] junta las dos partes en su imaginación porque su tasa de ganancia se determinan de acuerdo al capital total." (Marx, 1894, Capital, Vol. III, ch.2, p.27)

El modelo marxista en precios de producción

- El sistema en precios de producción es

$$(\boldsymbol{p}\boldsymbol{A} + w\boldsymbol{\ell})(1+r) = \boldsymbol{p}.$$

Notar que $w^M(1+r) = w^S$, donde w^M es el salario en el modelo marxista (el salario se paga antes de la producción por adelantado, la ganancia se aplica a todo el capital invertido, incluyendo el fondo de salarios) y w^S es el salario en el modelo sraffiano (el salario se paga luego de la producción y es parte de la distribución del excedente).

- En el modelo marxista el salario viene dado por una canasta de subsistencia, tal que

$$(\boldsymbol{p}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{p}\boldsymbol{d}\boldsymbol{\ell})(1+r) = \boldsymbol{p},$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{p}[\boldsymbol{I} - (1+r)(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{d}\boldsymbol{\ell})] = \boldsymbol{0}.$$

- Definamos la matriz $\boldsymbol{A}^+ = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{d}\boldsymbol{\ell})$ como la matriz de coeficientes inter-industriales "aumentada" para tener el consumo de los trabajadores. Entonces,

$$\boldsymbol{p}[\boldsymbol{I} - (1+r)\boldsymbol{A}^+] = \boldsymbol{0}.$$

- Esto da lugar a las mismas condiciones que en el sistema sraffiano, tal que la solución debe satisfacer $det[\boldsymbol{I} - (1+r)\boldsymbol{A}^+] = 0$, y existe $\lambda_m^+ \leq 1$ que implica $R^+ \geq 0$.
- Notar que $R^+ \leq R$ porque $\boldsymbol{A}^+ \geq \boldsymbol{A}$.

Teorema fundamental marxiano

- Notemos que podemos escribir los dos modelos como

$$det\left(\frac{1}{1+\sigma}\boldsymbol{I}-\left(\frac{1}{1+\sigma}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{d\ell}\right)\right)=0$$

$$det\left(\frac{1}{1+r}\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{d\ell})\right)=0$$

- Los dos modelos coinciden cuando $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ (no hay capital constante).
- Por otro lado, $\sigma=0$ implica que $r=0$. Morishima llama a esta relación el **teorema fundamental marxiano**: no hay ganancia sin explotación (o plusvalía).
- Ahora para el caso general, $\sigma>0$, tenemos que $\frac{1}{1+\sigma}\boldsymbol{A}<\boldsymbol{A}$, entonces también implica que $\frac{1}{1+\sigma}<\frac{1}{1+r}$, o $\sigma>r$. (La razón es que la solución λ_m^+ es decreciente en todos los elementos de $\boldsymbol{A}^+$.)

- Otra forma de ver este resultado es el siguiente. Si nosotros tenemos que $w = \boldsymbol{pd}$ y que $\sum_i \ell_i = 1$, entonces

$$\boldsymbol{p} = (1+r)[\boldsymbol{pA} + w\boldsymbol{\ell}] \Rightarrow \boldsymbol{p}[\boldsymbol{I} - (1+r)\boldsymbol{A}] = (1+r)w\boldsymbol{\ell} \Rightarrow \boldsymbol{p} = w(1+r)\ell[\boldsymbol{I} - (1+r)\boldsymbol{A}]^{-1}$$

  Multiplicando ambos lados de la igualdad por $\boldsymbol{d}$,

$$w = \boldsymbol{pd} = w(1+r)\boldsymbol{\ell}[\boldsymbol{I} - (1+r)\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{d} \Rightarrow 1 = (1+r)\boldsymbol{\ell}[\boldsymbol{I} - (1+r)\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{d}.$$

  El lado derecho de la igualdad es creciente en r y tiende a infinito cuando $r \to R$. Entonces tiene que darse que $1 > \boldsymbol{\ell}[\boldsymbol{I} - (1+r)\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{d}$ para que haya una $r > 0$.

- Ahora $V = \boldsymbol{vd} = \boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{d}$ y $S = 1 - V = 1 - \boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{d}$ donde 1 es el valor total que se produce en una economía. Entonces $S > 0$ si y solo si $1 > \boldsymbol{\ell}[\boldsymbol{I} - (1+r)\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{d}$.

- Definamos ahora a las industrias como industrias de tipo I (bienes de capital, en total $n-h$) y de tipo II (bienes de consumo, en total h):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_I &= \boldsymbol{v}_I \boldsymbol{A}_I + \boldsymbol{\ell}_I \\ \boldsymbol{v}_{II} &= \boldsymbol{v}_I \boldsymbol{A}_{II} + \boldsymbol{\ell}_{II} \end{aligned}$$

- El valor de las cesta de consumo es $\boldsymbol{v}_{II}\boldsymbol{d} = [0_{n-h} \;\; \boldsymbol{\ell}_{II}](\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{d}$.
- Definamos nuevamente $\sigma = \frac{1-\boldsymbol{v}_{II}\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{v}_{II}\boldsymbol{d}}$ como la **tasa de explotación o plusvalía**. $\boldsymbol{v}_{II}\boldsymbol{d}$ lo podemos llamar el trabajo necesario, y $1-\boldsymbol{v}_{II}\boldsymbol{d}$ el plusvalor.
- Usando $(1+e)\boldsymbol{v}_{II}\boldsymbol{d} = 1$, tenemos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_I &= \boldsymbol{v}_I \boldsymbol{A}_I + (1+\sigma)\boldsymbol{v}_{II}\boldsymbol{d}\boldsymbol{\ell}_I \\ \boldsymbol{v}_{II} &= \boldsymbol{v}_I \boldsymbol{A}_{II} + (1+\sigma)\boldsymbol{v}_{II}\boldsymbol{d}\boldsymbol{\ell}_{II} \end{aligned}$$

Teorema fundamental marxiano

No hay beneficios sin explotación. $r > 0 \Rightarrow \sigma > 0$

- Si cada industria tiene beneficios positivos, entonces

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_I &> \boldsymbol{p}_I \boldsymbol{A}_I + w\boldsymbol{\ell}_I \\ \boldsymbol{p}_{II} &> \boldsymbol{p}_{II} \boldsymbol{A}_{II} + w\boldsymbol{\ell}_{II} \end{aligned}$$

- Probemos primero, que la explotación es la fuente de beneficio.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_I &> \boldsymbol{p}_I \boldsymbol{A}_I + \boldsymbol{p}_{II} \boldsymbol{d\ell}_I \\ \boldsymbol{p}_{II} &> \boldsymbol{p}_{II} \boldsymbol{A}_{II} + \boldsymbol{p}_{II} \boldsymbol{d\ell}_{II} \end{aligned}$$

Definamos la matriz de insumos y insumos de trabajo como $\boldsymbol{A}^{+} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_I & \boldsymbol{A}_{II} \\ \boldsymbol{d\ell}_I & \boldsymbol{d\ell}_{II} \end{bmatrix}$.

Dado que $\boldsymbol{p}_I > 0$ y $\boldsymbol{p}_{II} > 0$, entonces $\boldsymbol{A}^{+}$ es productiva, existen vectores $\boldsymbol{x}_I$ y $\boldsymbol{x}_{II}$ de productos tal que

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_I \\ \boldsymbol{x}_{II} \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_I & \boldsymbol{A}_{II} \\ \boldsymbol{d\ell}_I & \boldsymbol{d\ell}_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_I \\ \boldsymbol{x}_{II} \end{bmatrix}.$$

Si multiplicamos por el vector positivo $\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{v}_I \ \ \boldsymbol{v}_{II}]$ tenemos

$$(\boldsymbol{v}_I \boldsymbol{x}_I + \boldsymbol{v}_{II} \boldsymbol{x}_{II}) - \boldsymbol{v}_I(\boldsymbol{A}_I \boldsymbol{x}_I + \boldsymbol{A}_{II} \boldsymbol{x}_{II}) - \boldsymbol{v}_{II}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{d\ell}_I \boldsymbol{x}_I + \boldsymbol{d\ell}_{II} \boldsymbol{x}_{II})$$

$$= e\boldsymbol{v}_{II}(\boldsymbol{d\ell}_I \boldsymbol{x}_I + \boldsymbol{d\ell}_{II} \boldsymbol{x}_{II}) > 0$$

Teorema fundamental marxiano

No hay explotación sin beneficios. $\sigma > 0 \Rightarrow r > 0$

- Si $\sigma > 0$, tenemos

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_I &> \boldsymbol{v}_I \boldsymbol{A}_I + \boldsymbol{v}_{II} \boldsymbol{d} \boldsymbol{\ell}_I \\
\boldsymbol{v}_{II} &> \boldsymbol{v}_I A_{II} + \boldsymbol{v}_{II} \boldsymbol{d} \boldsymbol{\ell}_{II}
\end{aligned}
$$

- Ahora pongamos $\boldsymbol{p}_I = \alpha \boldsymbol{v}_I$, $\boldsymbol{p}_{II} = \alpha \boldsymbol{v}_{II}$, para cualquier $\alpha > 0$, y $w = \alpha \boldsymbol{v}_{II} \boldsymbol{d}$. Entonces todas las industrias tienen beneficios a estos precios.

Explotación y beneficios: $r \leq \sigma$

- Exploremos la relación entre beneficios y explotación. Empezamos de,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_I &= \boldsymbol{v}_I \boldsymbol{A}_I + (1+\sigma)\boldsymbol{v}_{II}\boldsymbol{d}\boldsymbol{\ell}_I \\ \boldsymbol{v}_{II} &= \boldsymbol{v}_I \boldsymbol{A}_{II} + (1+\sigma)\boldsymbol{v}_{II}\boldsymbol{d}\boldsymbol{\ell}_{II} \end{aligned}$$

- Sumemos $\sigma \boldsymbol{v}_I \boldsymbol{A}_I$ y $\sigma \boldsymbol{v}_I \boldsymbol{A}_{II}$ a la primera y segunda ecuación respectivamente,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_I &< (1+\sigma)[\boldsymbol{v}_I \boldsymbol{A}_I + \boldsymbol{v}_{II}\boldsymbol{d}\boldsymbol{\ell}_I] \\ \boldsymbol{v}_{II} &< (1+\sigma)[\boldsymbol{v}_I \boldsymbol{A}_{II} + \boldsymbol{v}_{II}\boldsymbol{d}\boldsymbol{\ell}_{II}] \end{aligned}$$

  Recordando la definición de $\boldsymbol{A}^+$, entonces

$$\boldsymbol{v} < (1+\sigma)\boldsymbol{v}\boldsymbol{A}^+$$

  .

- Se puede probar que **no** existe un vector $\boldsymbol{x}$ (no negativo, no cero) tal que $f \geq \sigma$ y

$$\boldsymbol{x} = (1+f)\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{x},$$

  porque si existiera entonces $\boldsymbol{v}\boldsymbol{x} < (1+\sigma)\boldsymbol{v}\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{x} \leq (1+f)\boldsymbol{v}\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}\boldsymbol{x}$ (contradicción).

- Ahora usando el resultado $w = \boldsymbol{p}_{II}\boldsymbol{d}$, tenemos que $\boldsymbol{p} = (1+r)\boldsymbol{p}\boldsymbol{A}^+$. Del resultado anterior tenemos que tiene que cumplirse que $r < \sigma$, dado que sino podríamos elegir un $\boldsymbol{x}$ que cumpla esa igualdad.

Tasa de beneficios en valores

- Definamos (C_i, V_i, S_i) $i = 1, \ldots, n$ como las composiciones sectoriales, y $(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{S})$ como los vectores de todos los sectores.
- Definamos $\phi(\boldsymbol{x})$ como la tasa de beneficios en valores:

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \sigma \frac{\boldsymbol{Vx}}{\boldsymbol{Cx} + \boldsymbol{Vx}} = \sigma \frac{1}{\boldsymbol{Cx}/\boldsymbol{Vx} + 1},$$

  donde $\boldsymbol{Cx}/\boldsymbol{Vx}$ es la composición orgánica del capital. Notar que a mayor composición orgánica, menores beneficios, dada la tasa de explotación fija.
- Definamos la tasa de beneficios en valores del sector i, $\phi_i = \frac{S_i}{C_i+V_i} = \frac{\sigma}{C_i/V_i+1} = \frac{\sigma}{\gamma_i+1}$, donde $\gamma_i = C_i/V_i$ es la composición orgánica sectorial donde $C_i = \boldsymbol{vA}_{\cdot i}$ y $V_i = \boldsymbol{vd}\ell_i$.
- Se puede probar que la tasa agregada de beneficios es la media harmónica de las de cada sector, $\phi(\boldsymbol{x}) = \left(\sum_i \alpha_i \phi_i^{-1}\right)^{-1}$, donde $\alpha_i = \frac{\ell_i x_i}{\boldsymbol{\ell x}}$.

Tasa de beneficios en valores

- Si la composición orgánica es uniforme, $\phi_{min} = r = \phi_{max}$.

  Prueba:
  De la ecuación $\boldsymbol{p} = (1+r)\boldsymbol{p}\boldsymbol{A}^{+}$, tenemos que dado que $\boldsymbol{p} \gg 0$, $(1+r) > 0$, entonces para cualquier vector $\boldsymbol{x} \gg 0$, $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x} = (1+r)\boldsymbol{p}\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{x}$.
  Por otro lado, $\boldsymbol{v}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{x} + \sigma(\boldsymbol{v}_{II}\boldsymbol{d})\boldsymbol{\ell}\boldsymbol{x}$. En este caso, $\phi = \phi_i = \frac{S_i}{C_i + V_i}$ para todo i.
  Tenemos entonces, $\sigma \boldsymbol{v}\boldsymbol{d}\boldsymbol{\ell} x_i = \phi_i(\boldsymbol{v}\boldsymbol{A}^{+} x_i)$. Sumando todos los sectores, $\boldsymbol{v}\boldsymbol{x} = (1+\phi)\boldsymbol{v}\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{x}$. Como esto se cumple para todo $\boldsymbol{x} \gg 0$, $\boldsymbol{v} = (1+\phi)\boldsymbol{v}\boldsymbol{A}^{+}$, que tiene la misma forma del vector de precios. Entonces, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}$ y $\phi = r$. QED
- En general, $\phi_{min} < r < \phi_{max}$. Prueba: Roemer (1981, p.95).

El problema de la transformación de valores en precios

- Notemos que en general $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{p}$.
- El problema de la transformación se debe a las siguientes igualdades que no se cumplen:
  1. $\boldsymbol{vx} \neq \boldsymbol{px}$: la suma de valores no es igual a la suma de precios.
  2. $\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{\sigma \boldsymbol{v d \ell x}}{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{d\ell})\boldsymbol{x}} \neq \frac{r\boldsymbol{p}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{d\ell})\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{d\ell})\boldsymbol{x}} = r$: la tasa de ganancia en valores no es igual a la tasa de ganancia en precios.
  3. $\sigma \boldsymbol{v d \ell x} \neq r\boldsymbol{p}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{d\ell})\boldsymbol{x}$: la masa de plusvalía no es igual a la masa de beneficios en precios.
- El problema es que tenemos más ecuaciones $(n+3)$ que incógnitas $(n+1)$.
- Un caso particular es el de la composición orgánica del capital uniforme. Si separamos el capital (en valores) entre C (constante) y V (variable), la composición orgánica es el ratio $\gamma = C/V$.
- Si tenemos que $\gamma_i = \gamma$, entonces $\frac{\sigma \boldsymbol{v d \ell x}}{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{d\ell})\boldsymbol{x}} = \frac{\sigma \boldsymbol{v d \ell x}}{(1+\gamma)\boldsymbol{v d \ell x}} = \frac{\sigma \boldsymbol{V x}}{(1+\gamma)\boldsymbol{V x}} = \frac{\sigma}{1+\gamma}$. Se puede probar que en este caso, $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{v}$ tal que las 3 igualdades se cumplen.

El problema de la transformación de valores en precios

- El valor de cada mercancía está compuesto de 3 partes, $C + V + S$.
- Supongamos un sistema económico con 3 sectores: sector 1 (medios de producción), sector 2 (bienes de la canasta del salario) y sector 3 (bienes de lujo).

$$\left.\begin{array}{rcl} C_1 + V_1 + S_1 & = & C_1 + C_2 + C_3 \\ C_2 + V_2 + S_2 & = & V_1 + V_2 + V_3 \\ C_3 + V_3 + S_3 & = & S_1 + S_2 + S_3 \end{array}\right\}$$

- Marx asume que $\sigma = \frac{S_1}{V_1} = \frac{S_2}{V_2} = \frac{S_3}{V_3}$, la tasa de plusvalía es la misma en todos los sectores.
- La tasa de plusvalía no puede determinar los beneficios porque hay movilidad del capital. Definamos $\phi_i = \frac{S_i}{C_i + V_i}$, $i = 1, 2, 3$ como las tasas de beneficios en valores, y $\gamma_i = \frac{C_i}{V_i}$, $i = 1, 2, 3$ como la composición orgánica.
- Si $\gamma_i \neq \gamma_j$ los beneficios serán diferentes. Esto no se puede sostener con movilidad del capital...

El problema de la transformación de valores en precios

- En un sistema de precios de producción se asume una tasa de beneficios uniforme tal que
$$\phi = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{C_1 + C_2 + C_3 + V_1 + V_2 + V_3}$$
Pero esta tasa se observa en precios, no en valores....
- El problema de la transformación es encontrar (p_1, p_2, p_3) tal que
$$\left.\begin{array}{rcl} (p_1 C_1 + p_2 V_1)(1+r) & = & p_1(C_1 + C_2 + C_3) \\ (p_1 C_2 + p_2 V_2)(1+r) & = & p_2(V_1 + V_2 + V_3) \\ (p_1 C_3 + p_2 V_3)(1+r) & = & p_3(S_1 + S_2 + S_3) \end{array}\right\}$$
- La solución la encontró un economista ruso von Bortkiewicz.
$$r = \frac{\gamma_2 g_1 + g_2 - \sqrt{(\gamma_2 g_1 - g_2)^2 + 4\gamma_1 g_1 g_2}}{2(\gamma_2 - \gamma_1)} - 1$$
$$p_3 = 1,\ p_2 = \frac{g_3}{g_2 + (\gamma_3 - \gamma_2)(1+r)},\ p_1 = \frac{\gamma_1 p_2 (1+r)}{g_1 - (1+r)}$$
donde $\gamma_i = V_i / C_i$, $g_i = \frac{V_i + C_i + S_i}{C_i}$, $i = 1, 2, 3$.
- La solución propuesta no puede satisfacer las igualdades predichas por Marx.
- Notar que si $\gamma = \gamma_i$, la solución es $p_i = 1$, $i = 1, 2, 3$, $r = \phi$. Es decir, los valores son iguales a los precios.

El problema de la transformación de valores en precios

- El resultado anterior se basa en que si los precios son proporcionales a los valores entonce sí tenemos que la tasa de ganancia en valores (ϕ) es igual a la tasa de ganancia en precios (r). Estudiemos en qué casos se da esta proporcionalidad.
- El siguiente resultado se debe a Morishima (1989, p.23-24).
- Si los ratios de capital y trabajo son uniformes en todos los sectores, $\boldsymbol{pA}_{.i}/\ell_i = k$, $\forall i$, entonces los precios son proporcionales a los valores, $\boldsymbol{p} = \beta \boldsymbol{v}$, para $\beta > 0$.

  Prueba: Definamos $\beta = (1+r)\boldsymbol{pd} + rk$. Multiplicando por $\boldsymbol{\ell}$,
  $\beta\boldsymbol{\ell} = (1+r)\boldsymbol{pd\ell} + rk\boldsymbol{\ell} = (1+r)w\boldsymbol{\ell} + r\boldsymbol{pA}$. Sumando ahora $\boldsymbol{pA}$ a ambos lados de la igualdad,

  $$\beta\boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{pA} = (1+r)(w\boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{pA}) = \boldsymbol{p}.$$

  Entonces, $\boldsymbol{p} = \beta\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \beta\boldsymbol{v}$.
- Al revés también se cumple si $r > 0$. Supongamos que $\boldsymbol{p} = \beta\boldsymbol{v}$, entonces $\boldsymbol{pA}_{.i}/\ell_i = k$, $\forall i$.

  Prueba: De la ecuación de precios, $\boldsymbol{v} = (1+r)\boldsymbol{vd\ell} + (1+r)\boldsymbol{vA}$. Entonces, usando la definición de valores, $\boldsymbol{\ell} = (1+r)\boldsymbol{vd\ell} + r\boldsymbol{vA}$. Entonces, $\boldsymbol{\ell}\,[1-(1+r)\boldsymbol{vd}] = r\boldsymbol{vA}$, con lo cual $[1-(1+r)\boldsymbol{vd}] > 0$ implica $r > 0$. Ahora definamos $\alpha = [1-(1+r)\boldsymbol{vd}]\,/r > 0$, tal que $\alpha\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{vA}$, y multiplicando por β,

  $$\alpha\beta\boldsymbol{\ell} = \beta\boldsymbol{vA} = \boldsymbol{pA}.$$

  Finalmente definiendo $k = \alpha\beta$ llegamos al resultado.

Industrias básicas vs no básicas en el modelo marxista

- Podemos suponer el caso en que no todos los bienes entran directamente o indirectamente en la determinación del salario real, la canasta de consumo de los trabajadores.
- Separemos a los bienes en $1, 2, \ldots, m$ como los bienes que entran en la determinación del salario real, y $m+1, m+2, \ldots, n$ en las que no entran.
- Si nos fijamos en $\boldsymbol{A}^{+} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{d\ell}$, tenemos

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1^{+} & \boldsymbol{A}_2^{+} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_4^{+} \end{bmatrix}$$

  $\boldsymbol{A}_1^{+}$ es una matriz $m \times m$, $\boldsymbol{A}_2^{+}$ es una matriz $m \times (n-m)$, $\boldsymbol{A}_4^{+}$ es una matriz $(n-m) \times (n-m)$.
- Entonces la ecuación de precios la podemos escribir como

$$\begin{aligned} (1+r)\boldsymbol{p}^{m}\boldsymbol{A}_1^{+} &= \boldsymbol{p}^{m} \\ (1+r)[\boldsymbol{p}^{m}\boldsymbol{A}_2^{+} + \boldsymbol{p}^{n-m}\boldsymbol{A}_4^{+}] &= \boldsymbol{p}^{n-m} \end{aligned}$$

  Entonces la tasa de ganancia se determina solamente en la primera ecuación.
- El resultado es que r es una función decreciente de los elementos de $\boldsymbol{A}_1^{+}$. **Relación inversa entre salario y ganancia.**

Crítica sraffiana

- El punto central de la crítica sraffiana es que para hallar la tasa de ganancia **no hace falta referirse a los valores**. Si deseamos realizar la transformación de valores a precios, manteniendo la tasa de ganancia expresada en valores, en general caeremos en un sistema sin solución.
- "(...) la tasa de ganancia es un concepto utilizado en el análisis de una economía capitalista al 'nivel de los precios', no al 'nivel de los valores', y la tendencia a la uniformidad de las tasas de ganancia entre las industrias deriva de la movilidad del capital monetario" (Steedman, p.34).
- Sólo se rescata "que la existencia de plusvalía es una condición necesaria y suficiente para la existencia de ganancias" (ibidem, p.34) y "que la explotación capitalista es la fuente de la ganancia" (ibidem, p.35). Esto es el Teorema Fundamental Marxiano de Morishima: $\sigma > 0 \Rightarrow r > 0$.
- Samuelson (1971): Marx desarrolla un sistema de valores trabajo. Lo borra. Y desarrolla un sistema de precios que explica todo.

- Si el cambio tecnológico es tal que $\boldsymbol{A}^*_{.j} \geq \boldsymbol{A}_{.j}$ y $\ell^*_j \leq \ell_j$, $\forall j$, lo que implica $\boldsymbol{A}^{+*} \leq \boldsymbol{A}^+$, entonces la tasa de beneficios se incrementa, $r^* > r$.
- Pero es difícil establecer la dirección en general.
- Si el cambio técnico es tal que reduce los costos con los precios actuales, entonces la tasa de beneficios se incrementa. (Se llama este cambio tecnológico viable e implica que $\boldsymbol{p}^*\boldsymbol{A}^* + \boldsymbol{\ell}^* \leq \boldsymbol{p}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\ell}$.) Esto se conoce como el Teorema de Okishio (1961).

  Prueba: Usemos $\boldsymbol{p}\boldsymbol{A}^+ = \lambda\boldsymbol{p}$ donde $\lambda = (1+r)^{-1}$. Entonces, para cada columna de $\boldsymbol{A}^+$, $\frac{\boldsymbol{p}\boldsymbol{A}^+_{.i}}{p_i} = \lambda$.

  Definamos como tecnologá que reduce los costos si, $\frac{\boldsymbol{p}\boldsymbol{A}^{+*}_{.i}}{p_i} < \lambda$.[1] Por propiedades de $\boldsymbol{A}^{+*}$, $min_i \frac{\boldsymbol{p}^*\boldsymbol{A}^{+*}_{.i}}{p^*_i} = \lambda^* = max_i \frac{\boldsymbol{p}^*\boldsymbol{A}^{+*}_{.i}}{p^*_i}$, si $\boldsymbol{p}^*$ es un autovalor asociado a λ^*, sino $min_i \frac{\boldsymbol{p}\boldsymbol{A}^{+*}_{.i}}{p_i} < \lambda^* < max_i \frac{\boldsymbol{p}\boldsymbol{A}^{+*}_{.i}}{p_i}$, para cualquier otro $\boldsymbol{p} > 0$. Entonces,

  $$\frac{\boldsymbol{p}^*\boldsymbol{A}^{+*}_{.i}}{p^*_i} = \lambda^* < max_i \frac{\boldsymbol{p}\boldsymbol{A}^{+*}_{.i}}{p_i} < \lambda, \; r^* > r \; QED$$

- (Morishima, 1973) Si el cambio tecnológico es tal que es aumenta el capital $\boldsymbol{A}^*_{.j} \geq \boldsymbol{A}_{.j}$ y reduce el trabajo $\ell^*_j \leq \ell_j$, $\forall j$, lo que implica $\boldsymbol{A}^{+*} \leq \boldsymbol{A}^+$, y además, es *neutral*, $\boldsymbol{v}^* = \boldsymbol{v}$, entonces $r^* < r$. Pero si el cambio tecnológico es viable entonces $\boldsymbol{v}^* \leq \boldsymbol{v}$.

[1] Esto significa que a los precios antiguos, con la nueva técnica se obtiene una mayor ganancia, $(1+r)\boldsymbol{p}\boldsymbol{A}^{+*}_{.i} < p_i$.

Ejemplo numérico

Ejemplo: $n = 2$, $A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$, $\ell = [5/6 \;\; 1/6]$, $d = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$.

Resolución en R.

```
A=rbind(c(0.3,0.1),c(0.2,0.1)); L=cbind(5/6,1/6); d=rbind(0.1,0.5);

# Modelo sraffiano
e<-eigen(A); e$values;
R<-1/e$values[1]-1; R # max tasa de ganancia
ngrid<-100; r<-seq(0,R,length=ngrid); p2<-w<-matrix(0,1,ngrid);
for(i in 1:ngrid) {
w[1,i]<- ( (1-(1+r[i])*A[1,1])*(1-(1+r[i])*A[2,2])-(1+r[i])^2*A[1,2]*A[2,1] )/
          (     L[1]*(1-(1+r[i])*A[2,2])+ (1+r[i])*L[2]*A[2,1] )
p2[1,i]<-(      L[2]*(1-(1+r[i])*A[1,1])+ (1+r[i])*L[1]*A[1,2] ) /
         (      L[1]*(1-(1+r[i])*A[2,2])+ (1+r[i])*L[2]*A[2,1] )
}
plot(r,seq(0,max(w),length=ngrid), type="n",ylab="")
lines(r,w,col="blue"); lines(r,p2, col="red")
title(ylab="w,p2")

# Modelo marxista
v<-L%*% solve(diag(2)-A); v # vector de valores
delta<-v%*%d; delta # salario real en valores
sigma<-1/delta -1; sigma # tasa de plusvalia

# Mtodo alternaivo para resolver de acuerdo a Pasinetti p.125.
e<-eigen(d%*%L%*%solve(diag(2)-A)); e$values
sigma<-1/e$values[1]-1; sigma

# Matriz aumentada
A_=A+d%*%L; e<-eigen(A_);
R<-1/e$values[1]-1; R # max tasa de ganancia
```

Ejemplo: $n = 2$, $A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$, $\ell = [5/6 \;\; 1/6]$, $d = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}$.

Ejemplo numérico

Pasinetti (1977, cap.5).
$n = 3$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \frac{186}{450} & \frac{54}{21} & \frac{30}{60} \\ \frac{12}{450} & \frac{6}{21} & \frac{3}{60} \\ \frac{9}{450} & \frac{6}{21} & \frac{15}{60} \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 0.4133 & 2.5714 & 0.5 \\ 0.0266 & 0.2857 & 0.05 \\ 0.02 & 0.2857 & 0.25 \end{bmatrix}$$

Esta matriz es irreducible entonces los 3 bienes entran como insumos. Por otro lado

$$[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^{-1} \simeq \begin{bmatrix} 2.16261763 & 8.5909139 & 2.0144727 \\ 0.08688792 & 1.7834835 & 0.1768242 \\ 0.09076831 & 0.9084794 & 1.4544108 \end{bmatrix}$$

El máximo autovalor es $\lambda_m \simeq 0.674 < 1$ (los otros autovalores son 0.2 y 0.074). Entonces $R = \frac{1}{\lambda_m} - 1 \simeq 0.48$.
Supongamos que $\ell = \left[\frac{18}{450}\ \frac{12}{21}\ \frac{30}{60}\right] \simeq [0.04\ 0.05714\ 0.5]$. Entonces, el vector de valores es $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\ell}[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^{-1} \simeq [0.1818\ 1.818188\ 0.90909]$.
Supongamos ahora $w = 1$ y $r = 0.2 < R$. Entonces podemos resolver
$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{\ell}[\boldsymbol{I} - (1 + r)\boldsymbol{A}]^{-1} = [0.3371224\ 3.115189\ 1.270264]$ o $p_2 \simeq 9.24 p_1$ y $p_3 \simeq 3.77 p_1$ como los precios relativos.

Ejemplo numérico

Pasinetti (1977, cap.5).

Supongamos que $\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0.16666 \end{bmatrix}$. Entonces el valor del salario de subsistencia es $\boldsymbol{vd} \simeq 0.515 < 1$, tal que $\delta \simeq 0.515$ y la tasa de plusvalía $\sigma = \frac{1-\delta}{\delta} \simeq 0.9411$.

$$\boldsymbol{A}^{+} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{d\ell} = \begin{bmatrix} \frac{186}{450} & \frac{54}{21} & \frac{30}{60} \\ \frac{12}{450} & \frac{6}{21} & \frac{3}{60} \\ \frac{9}{450} & \frac{6}{21} & \frac{15}{60} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0.16666 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{18}{450} & \frac{12}{21} & \frac{30}{60} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{222}{450} & \frac{78}{21} & \frac{90}{60} \\ \frac{12}{450} & \frac{6}{21} & \frac{3}{60} \\ \frac{12}{450} & \frac{8}{21} & \frac{20}{60} \end{bmatrix}$$

La tasa de ganancia se determina de la ecuación característica $det[\boldsymbol{I} - (1+r)\boldsymbol{A}^{+}] = 0$ tal que $\lambda_m^{+} \simeq 0.84361$ y $R^{+} = \frac{1}{\lambda_m^{+}} - 1 \simeq 0.1854$.

Los precios relativos se pueden obtener a partir de $\boldsymbol{p}[\boldsymbol{I} - (1+R^{+})\boldsymbol{A}^{+}] = \boldsymbol{0}$. Notar que no podemos obtener los precios absolutos porque el determinante es 0. Entonces, $p_2 \simeq 9.286 p_1$ y $p_3 \simeq 3.849 p_1$.

Ejemplo numérico

Steedman (1977, cap.3)

	Insumos				Productos				
	Hierro		Trabajo		Hierro		Oro		Trigo
Hierro	28	$\oplus$	56	$\Rightarrow$	56	$\oplus$	$-$	$\oplus$	$-$
Oro	16	$\oplus$	16	$\Rightarrow$	$-$	$\oplus$	48	$\oplus$	$-$
Hierro	12	$\oplus$	8	$\Rightarrow$	$-$	$\oplus$	$-$	$\oplus$	8
Total	56	$\oplus$	80	$\Rightarrow$	56	$\oplus$	48	$\oplus$	8

Para obtener los valores, notar que $28v_h + 56 = 56v_h$ entonces $v_h = 2$. $16v_h + 16 = 48v_o$ entonces $v_o = 1$. $12v_h + 8 = 8v_t$ entonces $v_t = 4$.
Supongamos que los 80 trabajadores consumen 5 unidades de trigo. Entonces $V = 5v_t = 5 \times 4 = 20$. Entonces, $S = 80 - V = 80 - 20 = 60$. Por otro lado $C = 56 \times 2 = 112$. La tasa de explotación es $S/V = 60/20 = 3$ y la tasa de beneficios en valores $\phi = S/(C+V) = 60/(112+20) = 5/11$.
Para obtener los precios, tenemos 4 ecuaciones y 4 incógnitas, usando $p_o = 1$,

$$(1+r)(28p_h + 56w) = 56p_h,$$

$$(1+r)(16p_h + 16w) = 48,$$

$$(1+r)(12p_h + 8w) = 8p_t,$$

$$80w = 5p_t.$$

La solución es $r = 0.5208$, $w = 0.2685$, $p_h = 1.7052$ y $p_t = 4.2960$.

Ejemplo numérico

Steedman (1977, cap.3)
Notar que la producción total en valores es
$56 \times v_h + 48 \times v_o + 8 + \times v_t = 56 \times 4 + 48 \times 1 + 8 \times 4 = 192$ y la plusvalía total es 60.

Notar que la producción total en precios es
$56 \times p_h + 48 \times p_o + 8 + \times p_t = 56 \times 1.7052 + 48 \times 1 + 8 \times 4.2960 = 177.8592$ y la masa de beneficios totales es total es $116.9712 \times 0.52 = 60.92$.

Bibliografía

- Gilbert Abraham-Frois, Edmond Berrebi (1997) - Prices, Profits and Rhythms of Accumulation. Palgrave Macmillan UK.
- Michio Morishima (1973) Marx's Economics. A Dual Theory of Value and Growth. Cambridge University Press.
- Michio Morishima (1989) Ricardo's Economics. A General Equilibrium Theory of Distribution and Growth. Cambridge University Press.
- Luigi L. Pasinetti (1977) - Lectures on the Theory of Production. Columbia.
- John E. Roemer (1981) - Analytical Foundations of Marxian Economic Theory. Harvard University Press.
- Ian Steedman (1977) - Marx After Sraffa. Routledge.