Teoría sraffiana 3

Gabriel Montes-Rojas
Universidad de Buenos Aires
Email: gabriel.montes@fce.uba.ar
Web: http://gabrielmontes.com.ar

Modelos de producción conjunta (joint production)

Modelo con dos mercancías

Supongamos un modelo con dos mercancías y dos procesos. Este modelo lo podemos escribir definiendo a_{ij} como la cantidad de mercancía i que entre en el proceso j, y b_{ij} como la cantidad de la mercancía i producida por el proceso j.

			Insumos					Productos	
Proceso 1	a_{11}	$\oplus$	a_{21}	$\oplus$	ℓ_1	$\Rightarrow$	b_{11}	$\oplus$	b_{21}
Proceso 2	a_{12}	$\oplus$	a_{22}	$\oplus$	ℓ_2	$\Rightarrow$	b_{12}	$\oplus$	b_{22}
	$\sum a_{1j}$		$\sum a_{2j}$		$\sum \ell_j = 1$		$\sum b_{1j}$		$\sum b_{2j}$

Si usamos los precios p_1 y p_2, r y w, entonces el modelo de precios de producción lo podemos escribir como

$$(p_1 a_{11} + p_2 a_{21})(1+r) + wL_1 = p_1 b_{11} + p_2 b_{21},$$

$$(p_1 a_{12} + p_2 a_{22})(1+r) + wL_1 = p_1 b_{12} + p_2 b_{22}.$$

El modelo general para k mercancías y m procesos lo podemos plantear como

$$\boldsymbol{pA}(1+r) + w\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{pB},$$

donde $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son matrices $k \times m$. Notar que en este caso no hay una forma única de estandarizar por proceso o mercancía.

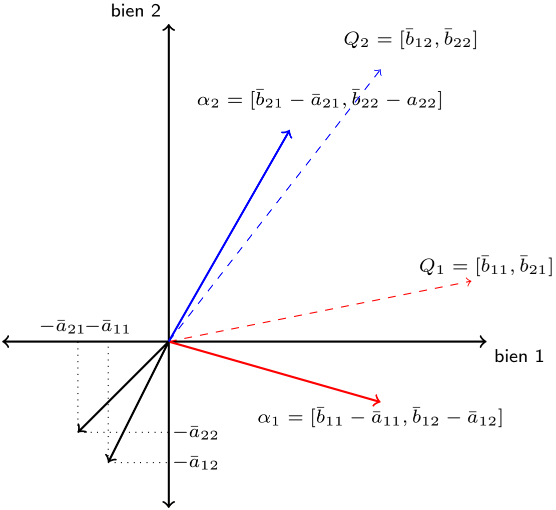
Modelo con dos mercancías

Definamos $\bar{a}_{ij} = a_{ij}/\ell_j$ como la cantidad de mercancía i por unidad de trabajo de la industria j que entra en el proceso j, y b_{ij} como la cantidad de la mercancía i por unidad de trabajo de la industria j producida por el proceso j.

$$(p_1\bar{a}_{11} + p_2\bar{a}_{21})(1+r) + w = p_1\bar{b}_{11} + p_2\bar{b}_{21},$$

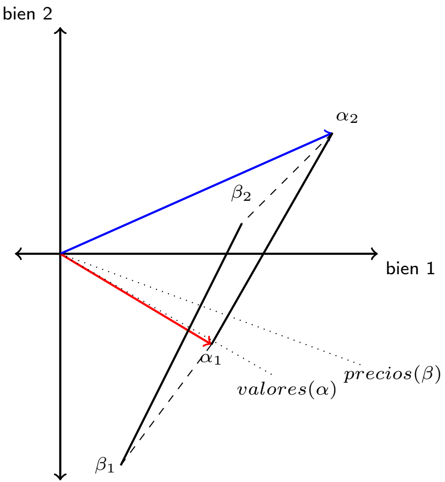
$$(p_1\bar{a}_{12} + p_2\bar{a}_{22})(1+r) + w = p_1\bar{b}_{12} + p_2\bar{b}_{22}.$$

Modelo de producción conjunta



Modelo de producción conjunta

Ejemplo con valores y precios negativos



Modelo de producción conjunta

Condiciones de viabilidad para el sistema de precios

- A partir de este sistema se pueden analizar las condiciones para que el sistema tenga sentido económico:

$$\boldsymbol{A} \geq 0, \quad \boldsymbol{B} \geq 0,$$
$$\boldsymbol{p} \geq 0, \quad \boldsymbol{\ell} \geq 0,$$
$$r \geq 0, \quad w \geq 0.$$

- Definamos:
  $X = \{\boldsymbol{x}'|\boldsymbol{x}' \geqq \boldsymbol{0}'\}$ como el conjunto de posibilidades de producción no negativas.
  $U(r) = \{\boldsymbol{x}'|\boldsymbol{x}' \in X \wedge [\boldsymbol{B} - (1+r)\boldsymbol{A}]\boldsymbol{x}' \geq \boldsymbol{0}'\}$ como el conjunto de posibilidades de producción viables a la tasa de ganancia r.
  $P = \{\boldsymbol{y}|\boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{0}\}$ precios no negativos.
  $V(r) = \{\boldsymbol{y}|\boldsymbol{y} \in P \wedge \boldsymbol{y}[\boldsymbol{B} - (1+r)\boldsymbol{A}] \geq \boldsymbol{0}\}$.
- Definamos $\mathcal{J} = \{r|U(r) \cap V(r)\}$ es el conjunto de tasas de ganancia que son viables. Notar que esto implica viabilidad tanto en cantidades como en precios.

Modelo de producción conjunta
Condiciones de viabilidad para el sistema de precios

- Condición de viabilidad CV1: Sea $\boldsymbol{\iota} = [1, 1, ..., 1]$ un vector $1 \times k$, entonces $[\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}]\boldsymbol{\iota}' > \boldsymbol{0}'$.
- Condición de viabilidad CV2: $\exists \hat{\boldsymbol{p}} : \{\hat{\boldsymbol{p}} > \boldsymbol{0} \wedge \hat{\boldsymbol{p}}[\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}] > 0\}$.
- Condición de viabilidad CV3: $det[\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}] \neq 0$. Esto garantiza que $f(r) = det[\boldsymbol{B} - (1 + r)\boldsymbol{A}]$ es un intervalo cerrado con $r = 0$ como su máximo.
- Condición de viabilidad CV4: Definamos $V'(r) = \{\boldsymbol{z} | \boldsymbol{z} = \boldsymbol{p}[\boldsymbol{B} - (1 + r)\boldsymbol{A}] \wedge \boldsymbol{p} \in V(r)\}$ como la imagen de $V(r)$. Entonces, $r \in \mathcal{J} \rightarrow \boldsymbol{L} \in V'(r)$. Es decir, para cada r el vector $\boldsymbol{\ell}$ nos da precios positivos, o sea, $p(r) = \boldsymbol{\ell}[\boldsymbol{B} - (1 + r)\boldsymbol{A}]^{-1} > \boldsymbol{0}$.

Notar que CV4 implica que los valores $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\ell}[\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}]^{-1} > \boldsymbol{0}$, dado que $r = 0 \in \mathcal{J}$.

Modelo de producción conjunta
Ejemplo con valores y plusvalía negativos

Consideremos este ejemplo de Steedman (1977, cap.11).

	Insumos						Productos		
Proceso 1	5	$\oplus$	0	$\oplus$	1	$\Rightarrow$	6	$\oplus$	1
Proceso 2	0	$\oplus$	10	$\oplus$	1	$\Rightarrow$	3	$\oplus$	12

Asumamos además que la canasta que compone el salario real es de 3 unidades del bien 1 y 5 unidades del bien 2 para 6 unidades de trabajo.
Resolvamos el sistema en términos de $w = 1$ (labour commanded),

$$(1+r)5p_1 + 1 = 6p_1 + p_2,$$

$$(1+r)10p_2 + 1 = 3p_1 + 12p_2,$$

$$3p_1 + 5p_2 = 6.$$

Entonces, $r = 0.20$, $p_1 = \frac{1}{3}$, $p_2 = 1$ es la solución.
Supongamos ahora el sistema en valores,

$$5v_1 + 1 = 6v_1 + v_2,$$

$$10v_2 + 1 = 3v_1 + 12v_2,$$

que tiene solución $v_1 = -1$ (¡negativo!) and $v_2 = 2$.

Modelo de producción conjunta

Ejemplo con valores y plusvalía negativos

Supongamos ahora un sistema en cantidades donde se usan 6 unidades de trabajo, 5 en el primer proceso y 1 en el segundo.

	Insumos						Productos		
Proceso 1	25	$\oplus$	0	$\oplus$	5	$\Rightarrow$	30	$\oplus$	5
Proceso 2	0	$\oplus$	10	$\oplus$	1	$\Rightarrow$	3	$\oplus$	12
Total	25		10		6	$\Rightarrow$	33		17

Entonces el producto neto es $(8, 7)$ de los cuales hay que restar $(3, 5)$ que es el consumo de los trabajadores. Queda así disponible una cantidad $(5, 2)$ de producto neto para los capitalistas (consumo o inversin para reproducción ampliada).

Calculemos, $V = 3 \times (-1) + 5 \times 2 = 7$, $S = 5 \times (-1) + 2 \times 2 = -1$, es decir, la plusvalía es negativa, mientras que $r > 0$. Así con producción conjunta la existencia de plusvalía no es una condición necesaria para la existencia de ganancia.

Capital fijo

- El punto central del uso del capital fijo es que se mantiene como medio de producción en más de un periodo. El mismo medio de producción en dos periodos diferentes se debe considerar como un bien diferente.
- (Woods, cap.9)
- Consideremos el siguiente sistema de producción. 1:hierro, 2: máq.nueva y 3: máq.vieja (¡la misma máquina!).
  Proceso Hierro

$$X_{11}\ hierro \oplus X_{21}\ maq.nueva \oplus \ell_1\ trabajo \Rightarrow X_1\ hierro$$

  Proceso Máquinas

$$X_{12}\ hierro \oplus X_{22}\ maq.nueva \oplus \ell_2\ trabajo \Rightarrow X_2\ maq.nueva \oplus X_{22}\ maq.vieja$$

$$X_{13}\ hierro \oplus X_{22}\ maq.vieja \oplus \ell_3\ trabajo \Rightarrow X_3\ maq.nueva$$

- El sistema de precios es

$$(1+r)(p_1X_{11}+p_2X_{21})+w\ell_1=p_1X_1$$

$$(1+r)(p_1X_{12}+p_2X_{22})+w\ell_2=p_2X_2+p_3X_{22}$$

$$(1+r)(p_1X_{13}+p_3X_{22})+w\ell_3=p_2X_3$$

  p_3 es el precio de una máquina vieja, que no necesariamente es un precio de mercado. En realidad es un precio interno imputado.

- Podemos reescribir el sistema de precios de las máquinas en

$$p_2 X_2 = w\ell_2 + (1+r)p_1 X_{12} + ((p_2 - p_3)X_{22} + rp_2 X_{22}),$$

como la suma de capital circulante más fijo.

- Para que el sistema sea viable necesitamos

$$X_1 \geq X_{11} + X_{12} + X_{13},$$

$$X_2 + X_3 \geq X_{21} + X_{22}.$$

- Del sistema de precios podemos eliminar X_{22} y p_3 (Woods, p.177) y obtener el siguiente sistema

$$(1+r)(p_1 A_{11} + p_2 A_{21}) + wA_1 = p_1,$$

$$(1+r)(p_1 A_{12}(r) + p_2 A_{22}(r)) + wA_2(r) = p_2,$$

donde $A_{11} = X_{11}/X_1$, $A_{21} = X_{21}/X_1$, $A_1 = \ell_1/X_1$,
$A_{12}(r) = ((1+r)X_{12} + X_{13})/((1+r)X_2 + X_3)$,
$A_{22}(r) = ((1+r)X_{22})/((1+r)X_2 + X_3)$,
$A_2(r) = ((1+r)\ell_2 + \ell_3)/((1+r)X_2 + X_3)$.

- De este sistema podemos resolver para (p_1, p_2, w, r).

- Uno de los resultados más interesantes es que el precio p_3 puede aparecer como negativo al resolver el sistema. Ésto lo podemos interpretar en términos de elección de técnica. Si $p_3 < 0$ entonces no es económicamente conveniento usar el tercer proceso, y las máquinas deberían dejarse de usar luego del primer año.
- De hecho podemos entonces comparar dos técnicas: α utiliza las máquinas en los dos periodos dando lugar a un proceso de producción conjunta, mientras que β sólo usa un periodo:
  Proceso Hierro

$$X_{11}\ hierro \oplus X_{21}\ maq.nueva \oplus \ell_1\ trabajo \Rightarrow X_1\ hierro$$

Proceso Máquinas

$$X_{12}\ hierro \oplus X_{22}\ maq.nueva \oplus \ell_2\ trabajo \Rightarrow X_2\ maq.nueva$$

Qué técnica es conveniente solo puede analizarse una vez que se comparan las dos fronteras $w - r$.

Renta

Renta extensiva

- Supongamos dos mercancías básicas, 1 y 2, donde la mercancía 2 usa el factor primario no reproducible (tierra), mientras que la 1 no.
- Supongamos dos tipos de tierra o recurso natural finito no reproducible tipo 1 y tipo 2. Supogamos que para satisfacer la demanda no alcanza con un sólo tipo.
- Para la mercancía 2, hay entonces 2 procesos

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 \oplus a_{21}x_2 \oplus \ell_1 &\quad \Rightarrow \quad x_1 \\ a_{12}x_1 \oplus a_{22}x_2 \oplus a_{32}t_1 \oplus \ell_2 &\quad \Rightarrow \quad x_2 \oplus a_{32}t_1 \\ a_{13}x_1 \oplus a_{23}x_2 \oplus a_{43}t_2 \oplus \ell_3 &\quad \Rightarrow \quad x_1 \oplus a_{43}t_2 \end{aligned}$$

  En este caso a_{32} es el uso de tierra tipo 1 en el proceso 1 de la mercancía 2. Y a_{43} es el uso de tierra tipo 2 en el proceso 2 de la mercancía 2. Notar que la tierra no se "consume", con lo cual forma parte del producto.
- La **renta** se paga como un premio a un factor que es escaso.
- Tenemos entonces dos posibilidades: (α) si se usa toda la tierra 2 y la tierra 1 sólo en parte, entonces la tierra 1 es **marginal**, se paga renta a la 2 y no a la 1. (β) si se usa toda la tierra 1 y la tierra 2 sólo en parte, entonces la tierra 2 es **marginal**, se paga renta a la 1 y no a la 2.

Renta extensiva

- Para el caso (α), tenemos las siguientes ecuaciones de precios:

$$(p_1^\alpha a_{11} + p_2^\alpha a_{21})(1+r) + w^\alpha \ell_1 = p_1^\alpha, \tag{1}$$

$$(p_1^\alpha a_{12} + p_2^\alpha a_{22})(1+r) + w^\alpha \ell_2 = p_2^\alpha, \tag{2}$$

$$(p_1^\alpha a_{13} + p_2^\alpha a_{23})(1+r) + \varrho^\alpha a_{43} + w^\alpha \ell_3 = p_2^\alpha. \tag{3}$$

  En este caso ϱ^α es la renta por unidad de la tierra tipo-2 (la tierra tipo-1 es marginal).
- Usando la mercancía 1 como *numeraire*, podemos encontrar la relación $w - r$ a partir de (1) y (2) solamente. Esto lo podemos llamar como el subsistema $\boldsymbol{p} - w - r$. Notar que la renta no juega ningún rol.
- Entonces, podemos encontrar

$$\varrho^\alpha = \Big((1+r)\ell_1 k(r) + \ell_2 f^\beta(r) - \ell_3 f^\alpha(r)\Big) / a_{43} g^\alpha(r) \tag{4}$$

  donde

$$k(r) = a_{12}\left(1 - (1+r)a_{23}\right) - a_{13}\left(1 - (1+r)a_{22}\right). \tag{5}$$

  $f^\beta(r)$ está definido en la siguiente diapositiva.
- Woods (p.230) "This substantiates the Ricardian argument: 'Corn is not high because a rent is paid, but a rent is paid because corn is high; and it has been justly observed, that no reduction would take place in the price of corn, although landlords should forego the whole of their rent' (Ricardo, 1951, pp. 74-5)."

Renta extensiva

- Para el caso (β), tenemos las siguientes ecuaciones de precios:

$$(p_1^\beta a_{11} + p_2^\beta a_{21})(1+r) + w^\beta \ell_1 = p_1^\beta, \tag{6}$$

$$(p_1^\beta a_{12} + p_2^\beta a_{22})(1+r) + \varrho^\beta a_{32} + w^\beta \ell_2 = p_2^\beta, \tag{7}$$

$$(p_1^\beta a_{13} + p_2^\beta a_{23})(1+r) + w^\beta \ell_3 = p_2^\beta. \tag{8}$$

En este caso ϱ^β es la renta por unidad dela tierra tipo-1 (la tierra tipo-2 es marginal).

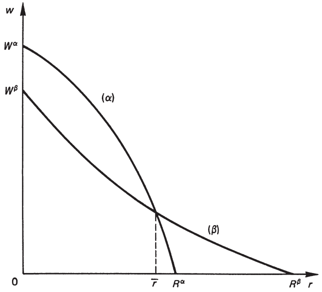
- Usando la mercancía 1 como *numeraire*, podemos encontrar la relaciíon $w - r$ a partir de (6) y (8) solamente. Esto lo podemos llamar como el sub-sistema $\boldsymbol{p} - w - r$. Notar que la renta no juega ningún rol.
- Entonces, podemos encontrar

$$\varrho^\beta = \Big(-(1+r)\ell_1 k(r) - \ell_2 f^\beta(r) + \ell_3 f^\alpha(r)\Big)/a_{32} g^\beta(r). \tag{9}$$

- Notar que entonces $sign(\varrho^\beta) = -sign(\varrho^\alpha)$.

Renta

- Para $0 \leq r < \bar{r}$, $\varrho^{\alpha} > 0$.
- Para $\bar{r} < r \leq R^{\alpha}$, $\varrho^{\beta} > 0$.
- Para $r = \bar{r}$, $\varrho^{\alpha} = \varrho^{\beta} = 0$.
- Si solamente un proceso es necesario, entonces se calcula como cambio de técnica, 'frontera exterior'. Si se necesitan las dos tierras (una marginal la otra no) se usa la 'frontera interior'.



Bibliografía

- Gilbert Abraham-Frois, Edmond Berrebi (1997) - Prices, Profits and Rhythms of Accumulation. Palgrave Macmillan UK.
- G.C. Harcourt (1972) - Some Cambridge controversies in the theory of capital. Cambridge University Press.
- Heinz Kurz y Neri Salvadori (1995) - Theory of Production. A Long Period Analysis. Cambridge University Press.
- Lynn Mainwaring (1984) - Value and Distribution in Capitalist Economies. An Introduction to Sraffian Economics. Cambridge University Press.
- Luigi L. Pasinetti (1977) - Lectures on the Theory of Production. Columbia.
- Alessandro Roncaglia (1978) - Sraffa and the Theory of Prices. John Wiley & Sons Ltd.
- Ian Steedman (1977) - Marx After Sraffa. Routledge.
- John E. Woods (1999) - The Production of Commodities. An Introduction to Sraffa. Palgrave Macmillan UK.