La incertidumbre

Gabriel Montes-Rojas
Universidad de Buenos Aires
Email: gabriel.montes@fce.uba.ar
Web: http://gabrielmontes.com.ar

Loterías

- La incertidumbre se modela a partir de eventos aleatorios que ocurren con cierta probabilidad. Estas son genéricamente llamdas loterías (L).

Una lotería simple es una lista $L = (p_1, ..., p_n)$, $p_n \geq 0$, con $\sum_n p_n = 1$ es la probabilidad de ocurrencia de un evento con resultado n.

- Sea $\mathcal{L}$ el espacio de loterías. Las preferencias se pueden representar sobre $\mathcal{L}$, dando lugar a la relación $\succcurlyeq$.
- Notar que en este caso se está evaluando distribuciones o probabilidades sobre eventos. En cierta manera, hay una preferencia subyacente sobre esos eventos, pero dada esta se evalúan las probabilidades de ocurrencia.

Loterías

- La relación $\succcurlyeq$ es **continua** en $\mathcal{L}$ si para $L, L', L'' \in \mathcal{L}$ los conjuntos

$$\{\alpha \in [0,1] : \alpha L + (1-\alpha)L' \succcurlyeq L''\} \subset [0,1]$$

$$\{\alpha \in [0,1] : L'' \succcurlyeq \alpha L + (1-\alpha)L'\} \subset [0,1]$$

  son **cerrados** (informalmente: tiene los bordes).

- La relación $\succcurlyeq$ cumple con el axioma de **independencia** en $\mathcal{L}$ si para $L, L', L'' \in \mathcal{L}$, y $\alpha \in (0,1)$

$$L \succcurlyeq L' \; si \; y \; solo \; si \; \alpha L + (1-\alpha)L'' \succcurlyeq \alpha L' + (1-\alpha)L'' \subset [0,1]$$

  O sea, la comparación de dos loterías (L, L') no depende de una eventual tercera (L'').

Preferencias sobre loterías

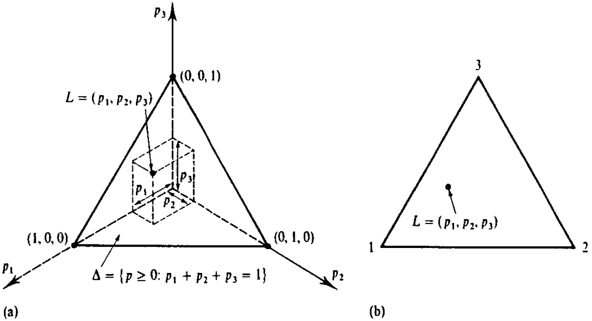
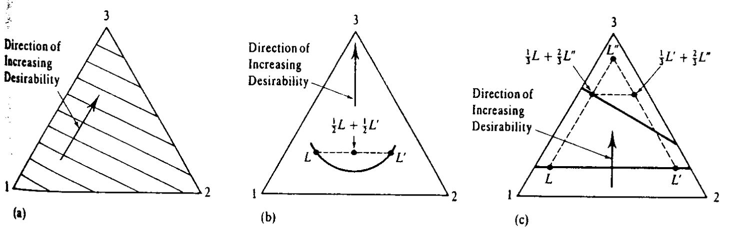


Figure 6.B.1
Representations of the simplex when $N = 3$.
(a) Three-dimensional representation.
(b) Two-dimensional representation.

Preferencias sobre loterías

ure 6.B.5 Geometric explanation of the expected utility theorem. (a) $\succsim$ is representable by a utility function with the expected lity form. (b) Contradiction of the independence axiom. (c) Contradiction of the independence axiom.



Utilidad esperada

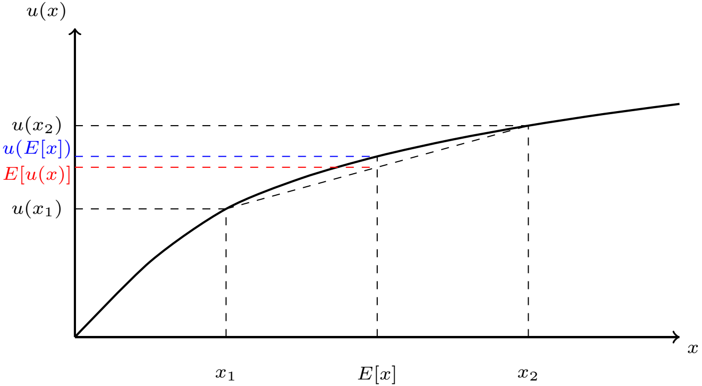
- Para nuestros propósitos la incertidumbre se modela como una variable aleatoria, X, que viene modelada por su función de distribución F. F es una lotería también.
- Supongamos que las preferencias sobre los **resultados** de la lotería, x, se modelan con $u(x)$, llamada utilidad **Bernoulli**, y está definida sobre resultados monetarios.
- Daniel Bernoulli fue el primero en aplicarla en la Paradoja de San Petersburgo: ¿Cómo valuaría el siguiente juego? Sea x_m una variable aleatoria de tirar una moneda, que es 1 con prob. 1/2, 0 con prob 1/2. Supongamos se paga 2^m por la cantidad de veces que obtiene 1 hasta obtener 0. Entonces $\sum_{m=1}^{\infty} 2^m(1/2^m) = +\infty$. ¡Bernoulli propuso la idea de una función utilidad cóncava!
- Las preferencias bajo incertidumbre se presentan como elecciones de F, para maximizar la **utilidad esperada** $U(F) = E[u(X)] = \int u(x)dF$. Ésta se llama **von-Neumann-Morgestern** (vN-M).
- Proposición: supongamos que $\succcurlyeq$ cumple con **continuidad** e **independencia**. Entonces, las preferencias se pueden representar por una utilidad esperada vN-M. Intuición: las preferencias son lineales en las preferencias.
- Proposición: La utilidad esperada U es única hasta una transformación afín (se puede representar como una función lineal, $f(x) = a + bx$). Intuición: una consecuencia de la linealidad.

Aversión al riesgo

- Si $\int u(x)dF(x) \leq u\left(\int xdF(x)\right)$ el individuo es **averso al riesgo**.
- Si $\int u(x)dF(x) = u\left(\int xdF(x)\right)$ el individuo es **neutro al riesgo**.
- Si $\int u(x)dF(x) \geq u\left(\int xdF(x)\right)$ el individuo es **amante al riesgo**.
- Desigualdad de Jensen: para una función cóncava, $u(x)$, $\int u(x)dF(x) \leq u\left(\int xdF(x)\right)$. Entonces la concavidad de u.
- **Equivalente cierto** (certainty equivalent): $u(c(F,u)) = \int u(x)dF(x)$. Aversión al riesgo es equivalente a $c(F,u) \leq \int xdF(x)$ para todo F y a la concavidad de u.

Aversión al riesgo

Si el individuo es averso al riesgo $E[u(x)] < u(E[x])$.



Aversión al riesgo

- Supongamos un nivel de riqueza con certidumbre w. Ahora consideremos una perturbación aleatoria $\epsilon \sim (0, \sigma^2)$.
- Evaluemos $U(w + t\epsilon)$ y definamos $\pi(t)$ como la prima de riesgo asociada (cuánto está dispuesto a pagar para evitar el riesgo $t\epsilon$), $U(w + t\epsilon) = U(w - \pi(t))$. $w - \pi(t)$ es el equivalente cierto de la lotería $w + t\epsilon$. Notar que por definición $\pi(0) = 0$.
- Aplicando una expansión de Taylor tenemos $\pi(t) \approx \pi(0) + \pi'(0)t + \frac{1}{2}\pi''(0)t^2$.
- Diferenciando $U(w + t\epsilon) = u(w + \pi(t))$ con respecto a t a ambos lados de la igualdad,

$$\begin{aligned} -u'(w - \pi(t))\pi'(t) &= E[u'(w + t\epsilon)\epsilon] \\ u''(w - \pi(t))\pi'(t)^2 - u'(w - \pi(t))\pi''(t) &= E[u''(w + t\epsilon)\epsilon^2] \end{aligned}$$

- De la primera ec. vemos que $\pi'(0) = 0$. (La razón es que tiene que cumplirse para $t = 0$ esta igualdad $-u'(w + 0)\pi'(0) = E[u'(w + 0)\epsilon] = u'(w)E[\epsilon] = 0$)
- De la segunda ec. $\pi'(0) = -\frac{E[u''(w)\epsilon^2]}{u'(w)} = -\frac{u''(w)\sigma^2}{u'(w)}$.
- Dado que t se puede interpretar como aleatoriedad, lo anterior es el precio marginal de la incertidumbre.

Aversión al riesgo

- Definamos $r(w,u) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}$ como la medida de **Arrow-Pratt de aversión (absoluta) al riesgo**.
- De los resultados de la diapositiva anterior esto es el precio marginal de la incertidumbre.
- Dados dos individuos con utilidades $u_A(w)$ y $u_B(w)$, decimos que A es más contrario a correr riesgos que B si $r(w,u_A) \geq r(w,u_B)$.

Teorema de Pratt

Sean u_A y u_B dos funciones de utilidad diferenciables, crecientes y monótonas. Los siguientes son equivalentes.

- $r(w, u_A) > r(w, u_B)$ para todo w.
- $u_A(w) = g(u_B(w))$ para alguna función creciente y estrictamente cóncava g.
- $\pi_A(\epsilon) > \pi_B(\epsilon)$ para todo $E[\epsilon]$.
- $C(F, u_B) < C(F, u_A)$ para todo F.

Aversión al riesgo

- Medida local vs global, ¿cambia con w?
- Definamos $\rho(w,u) = -\frac{u''(w)w}{u'(w)}$ como la medida de **Arrow-Pratt de aversión (relativa) al riesgo**.
- CARA (constant absolute risk aversion): $u(w) = 1 - e^{-rw}$, $u'(w) = re^{-rw}$, $u''(w) = -r^2 e^{-rw}$.
- CRRA (constant relative risk aversion): $u(w) = \frac{w^{1-\rho}-1}{1-\rho}$, $u'(w) = w^{-\rho}$, $u''(w) = -\rho w^{-\rho-1}$. Notar que cuando $\rho \to 1$, $u(w) = log(w)$.
- HARA (hyperbolic absolute risk aversion):

$$r(w,u) = \frac{1}{aw+b}$$

$$u(w) = \frac{(w-\bar{w})^{1-R}}{1-R}$$

con $R = 1/a$, $\bar{w} = -b/a$. Cuando $a = 0$ es CARA. Cuando $b = 0$ es CRRA.

- DARA/IARA (decreasing/increasing absolute risk aversion): DARA $u(w) = log(w)$. IARA: $u(w) = w - aw^2$.
  Notar que $\frac{\partial r(w,u)}{\partial w} = -\frac{u'(w)u'''(w)-[u''(w)]^2}{[u'(w)]^2}$. Para que < 0 tiene que darse que $u'''(w) > 0$ (asimétrica positiva).

Ejemplo: Seguro

- Supongamos un mercado de seguro. El individuo tiene riqueza w. Con probabilidad π ocurre una pérdida D. Tiene utilidad Bernoulli u estrictamente creciente y cóncava.
- Hay un seguro que asegura \$1 y cuesta q. Sea α la cantidad comprada del seguro.
- $\max_{\alpha \geq 0} (1-\pi)u(w-\alpha q) + \pi u(w - \alpha q - D + \alpha)$.
- CPO: $-q(1-\pi)u'(w-\alpha^* q) + \pi(1-q)u'(w - D + \alpha^*(1-q)) \leq 0$ y $= 0$ si $\alpha^* > 0$.
- Supongamos que $q = \pi$ (actuarialmente justo, que implica que el seguro tiene beneficios esperados 0), entonces $u'(w - D + \alpha^*(1-\pi)) \leq u'(w - \alpha^* \pi)$.
- Dado que asumimos que u es cóncava (averso al riesgo), $u'(w-D) > u'(w)$, implica $\alpha^* > 0$.
- Como u' es estrictramente decreciente $w - \alpha^*\pi = w - D + \alpha^*(1-\pi)$, entonces $\alpha^* = D$.
- **Si el seguro es actuarialmente justo, un individuo averso al riesgo se asegura completamente y la riqueza ex-post es $w - \pi D$ siempre.**
- Evaluar que pasa si $q \neq \pi$.

Ejemplo: Demanda de un activo riesgoso

- Supongamos un activo riesgoso con pago aleatorio $1 + R$.
- El individuo tiene riqueza w y la invierte en activo en cantidad $a \leq w$. El retorno neto es $w - a + a(1 + R)$.
- $v(a) = \max_a E[u(w + aR)]$.
- Primera derivada: $v'(a) = E[u'(w + aR)R]$
- Segunda derivada: $v''(a) = E[u''(w + aR)R^2]$. Si es averso al riesgo la CSO se satisface.
- Supongamos $a = 0$. $v'(0) = E[u'(w + 0)R] = u'(w)E[R]$. Si $E[R] \leq 0$, $v'(0) \leq 0$ entonces no invertir es óptimo en este caso. Si $E[R] > 0$, $v'(0) > 0$, entonces $a > 0$.
- La condición de optimalidad es $E[u'(w + aR)R] = 0$, la utilidad marginal esperada de la riqueza es 0.

Ejemplo: Demanda de un activo riesgoso (cont.)

- Tomemos la identidad $E[u'(w+a(w)R)R] \equiv 0$ y diferenciemos con respecto a w,

$$E[u''(w+a(w)R)R(1+a'(w)R)] \equiv 0,$$

$$a'(w) = -\frac{E[u''(w+a(w)R)R]}{E[u''(w+a(w)R)R^2]}$$

  Como el denominador es negativo $sign\ a'(w) = signE[u''(w+a(w)R)R]$.

- $E[u''(w+aR)R]$ es positivo, negativo o cero si $r'(w)$ es negativo, positivo o cero.
  Prueba: Si $r'(w) < 0$, entonces $E[u''(w+aR)R] > 0$. Si $R > 0$, entonces $r(w+aR) = -\frac{u''(w+aR)}{u'(w+aR)} < r(w)$, entonces, $u''(w+aR) > -r(w)u'(w+aR)$ o también $u''(w+aR)R > -r(w)u'(w+aR)R$.
  Si $R < 0$, $u''(w+aR) < -r(w)u'(w+aR)$ o también $u''(w+aR)R > -r(w)u'(w+aR)R$. Ahora, $E[u''(w+aR)R] > -r(w)E[u'(w+aR)R] = 0$ por CPO.

- El efecto de un cambio en la inversión depende de cómo cambia la aversión al riesgo.

Ejemplo: Demanda de un activo riesgoso (cont.)

- Supongamos que $R_2 = R_1 + D$ con $D > 0$. Por CPOs: $E[u'(w + a_1 R_1)R_1] = 0$ y $E[u'(w + a_2 R_2)R_2] = 0$. Demostramos que $a_2 > a_1$.
  Prueba: Consideremos una expansión de Taylor,
  $u'(w + a_2 R_2) \approx u'(w + a_2 R_1) + Du''(w + a_2 R_1)$. Si $a_2 < a_1$, entonces, por CPO,
  $0 = E[u'(w + a_2 R_2)R_2] > E[u'(w + a_2 R_1)R_2] > E[u'(w + a_2 R_1)R_1] >$
  $E[u'(w + a_1 R_1)R_1] = 0$ (tambin por CPO). La última igualdad es porque al tener $a_2 < a_1$ disminuye la utilidad marginal. Lo cual es una contradicción.
- Supongamos ahora un desplazamiento del retorno a $(1 + h)R$. De la CPO, $E[u'(w + a(1 + h)R)R] = 0$. Ahora si usamos $a(h) = a(0)/(1 + h)$, tenemos que $E[u'(w + a(h)(1 + h)R)R] = E[u'(w + a(0)R)R] = 0$, que es el óptimo original. Entonces, cuando se aumenta retorno en $(1 + h)$, se reduce la inversión en $1/(1 - h)$.
- Supongamos ahora que se incrementa la varianza, dejando la media constante, mean-preserving spread. Hagamos el activo con retorno $R + h(R - \bar{R}) = (1 + h)R - h\bar{R}$. La media es $\bar{R} = E[R]$ y la varianza es $(1 + h)^2 \sigma_R^2$. Los dos efectos apuntan en la dirección de reducir a.

Casos en los que la media y la varianza del activo riesgoso son suficientes

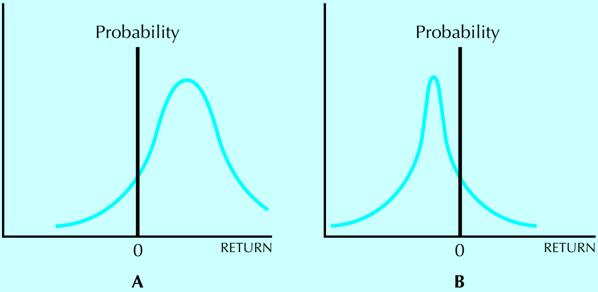
- Supongamos que $u(w) = w - bw^2$. Entonces $Eu(w) = Ew - bEw^2 = \bar{w} - b\sigma_w^2 - b\bar{w}^2$. Entonces solo necesitamos saber la **media** y la **varianza**.
- Supongamos que $w \sim N(\bar{w}, \sigma_w^2)$. Entonces la variable aleatoria w se puede describir como funciones de $(\bar{w}, \sigma_w^2)$ solamente.
- Supongamos $u(w) = -e^{-rw}$. Notar que $-rw \sim N(-r\bar{w}, r^2\sigma_w^2)$. Ahora la distribución log-Normal es la distribución de $e^{N(\mu,\sigma^2)}$, que tiene media $e^{\mu+\sigma^2/2}$. Así, $E[u(w)] = -e^{-r(\bar{w}-r\sigma_2^2/2)}$. Notar que una transformación monotónica, nos da $u^*(\bar{w}, \sigma_w^2) = \bar{w} - \frac{r}{2}\sigma_w^2$.
- La teoría de optimización de portfolio se basa en este trade-off entre media y varianza, o retorno y riesgo.

Maximización de portfolio

- Supongamos dos activos riesgosos, $x_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $x_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Los dos activos pueden estar correlacionados.
- La riqueza es $w = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2$ donde $\alpha \in [0,1]$ es la proporción invertida en el activo 1.
- Suponga una función CARA $u(w) = -e^{-rw}$.

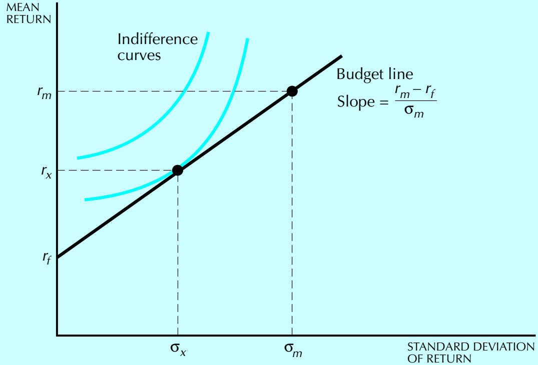
- Supongamos que $\mu_1 = \mu_2$ y que $Corr(x_1, x_2) = 0$. Encuentre el portfolio óptimo.
- Supongamos que $\mu_1 = \mu_2$ y que $Corr(x_1, x_2) = \rho > 0$. Encuentre el portfolio óptimo.
- Supongamos que $\mu_1 = \mu_2$ y que $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$. ¿Debería invertir todo en el activo 2, que es menos riesgoso?
- Supongamos que $\mu_1 > \mu_2$ y que $Corr(x_1, x_2) = \rho$. Encuentre el portfolio óptimo.
- Grafique las funciones de indiferencia en el plano $(\bar{w}, \sigma_w^2)$.
- Grafique ahora la curva $E[w(\alpha)], Var[w(\alpha)]$ en el plano de media y varianza para distintos α.

Media y riesgo, trade-off



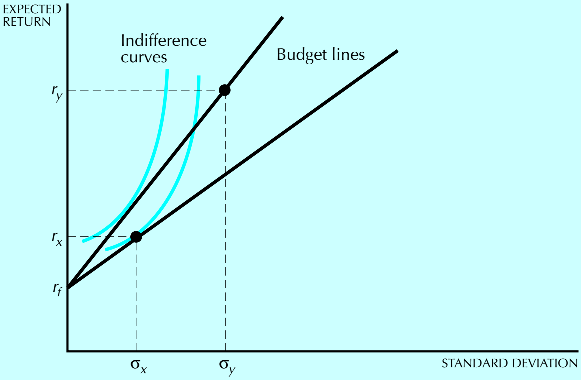
Mean and variance. The probability distribution depicted in panel A has a positive mean, while that depicted in panel B has a negative mean. The distribution in panel A is more "spread out" than the one in panel B, which means that it has a larger variance.

Media y riesgo, trade-off



Risk and return. The budget line measures the cost of achieving a larger expected return in terms of the increased standard deviation of the return. At the optimal choice the indifference curve must be tangent to this budget line.

Media y riesgo, trade-off



Preferences between risk and return. The asset with risk-return combination y is preferred to the one with combination x.