Microeconomía heterodoxa: Modelos sraffianos y marxistas

Gabriel Montes-Rojas [1]

Universidad de Buenos Aires y CONICET

11 de mayo de 2021

[1]CONICET e Instituto Interdisciplinario de Economía Política de Buenos Aires (IIEP-BAIRES), Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires, Av. Córdoba 2122 2do piso, C1120AAQ, Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina. E-mail: gabriel.montes@fce.uba.ar

A Eli.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. Una microeconomía heterodoxa

Este libro está pensado para servir de complemento a un curso de microeconomía básica o avanzada que tiene como base un libro de texto marginalista o neoclásico. La teoría neoclásica que se enseña en las carreras de Economía cubre los siguientes tópicos: preferencias y utilidad, teoría de la firma y producción, análisis de equilibrio parcial y general, éste último en modelos de intercambio puro o con producción. A ello se agregan modelos de incertidumbre, información imperfecta, modelos de competencia no perfecta (monopolio, monopsonio, oligopolio, competencia monopolística), externalidades, bienes públicos, temporalidad y modelos de teorías de juegos. El contenido es bastante abarcativo y muy útil para entender el comportamiento individual maximizador, así como modelar una economía capitalista con individuos que maximizan su utilidad y/o beneficios. Ver por ejemplo Mas-Colell, Whinston, y Green (1995), Varian (2015) y Jehle y Reny (2011) para libros de texto representativos. No vamos a hacer una distinción histórica o teórica entre los términos marginalista y neoclásico, y en todo caso, nos referimos al conjunto de modelos que se encuentran en los libros de texto antes mencionados.

El tópico central del libro es el análisis del valor y distribución en el llamado **núcleo** de una economía (ver la discusión en Garegnani, 1984; Ciccone, Fratini, y Trezzini, 2009) en base a la consideración de los economistas clásicos. En particular, este libro estudia los llamados modelos sraffianos y marxistas. Encuadramos a estos modelos bajo el rótulo de *heterodoxos*, aunque éste último término es más abarcativo, incluyendo modelos post-keynesianos, sobre todo kaleckianos, aunque también de diversa índole (ver la discusión en los capítulos introductorios de Lavoie, 2009, 2014). Los libros que cubren tópicos similares y de los que se nutre este libro son los clásicos textos de Piero Sraffa (Sraffa, 1960) y Karl Marx (Marx, 1894), y los estudios específicos sobre la materia de Morishima (1973, 1989), Pasinetti (1977), Roemer (1981), Mainwaring (1984), Petri (1989), Woods (1990), Kurz y Salvadori (1995), Abraham-Frois y Berrebi (1997) y Fiorito (2019).

Éstos modelos se diferencian en dos grandes puntos con respecto a los modelos neoclásicos. Primero, en la determinación de los precios. Podemos pensar que el libro estudia así la determinación de los precios de una forma alternativa a los modelos de equilibrio general walrasianos estáticos. Segundo, en la determinación de la tasa de ganancia a partir del concepto de excedente, y no como remuneración a un factor capital.

1.2. La teoría de los precios

En línea con la definición de Robbins, para la teoría neoclásica, la ciencia económica es “la ciencia que estudia el comportamiento humano en cuanto a la relación entre fines y medios escasos que tienen usos alternativos.” La oferta y la demanda mediados por el costo de oportunidad y las preferencias, respectivamente, son los principales determinantes de los precios de los bienes. La escasez juega un rol central para explicar los precios de bienes no reproducibles (ej. una pintura original). En este contexto, las preferencias regulan perfectamente el intercambio, como por ejemplo en el modelo walrasiano. Si tenemos dotaciones que caen del cielo, y que se distribuyen en forma arbitraria, el intercambio de los mismos se regulará por las preferencias inherentes a ellos. Marshall analiza este aspecto enfatizando su aspecto temporal: dicho análisis corresponde a un 'período corto' donde predomina la demanda. La cantidad se considera fija, y sólo resta vaciar el mercado a través del precio. Y el hecho que determinará su valor (de cambio) será entonces su escasez. Jevons, comparando con la teoría del valor trabajo lo expresa claramente: "El trabajo determina a menudo el valor, pero sólo de un modo indirecto, al hacer variar el grado de utilidad de las mercancías por medio de un aumento o de una limitación de la oferta." (citado en Marshall, 1890, p.674) Podemos así pensar que la determinación última del valor en la teoría marginalista corresponde a las preferencias de los distintos individuos.

Sin embargo, la determinación de precios para bienes reproducibles (las llamadas mercancías) no encaja sin fisuras en el análisis walrasiano y marshalliano. En la teoría clásica, los precios de las mercancías reproducibles son determinadas por la complejidad del proceso productivo y la distribución del excedente. Las preferencias de los consumidores juegan un rol secundario. En los modelos sraffianos y marxistas se asume (en un principio) que la economía se reproduce a escala invariante todos los periodos, en lo que se da en llamar **reproducción simple**. Los precios deben determinarse simultáneamente como productos e insumos, dada una determinada relación de fuerzas entre clases para quedarse con más o menos excedente. Si no hay límites a la reproducción, no está claro que la escasez y la utilidad marginal decreciente puedan explicar los precios de las mercancías.

Lo anterior no implica que no deba considerarse la escasez y las preferencias de los individuos. La diferencia es que esto se considera de una manera complementaria al modelo de reproducción simple, como un apéndice al modelo básico. En particular, los modelos de renta diferencial (Quadrio Curzio y Pellizzari, 1999) estudian el mismo problema de la escasez con herramientas alternativas.

1.3. La teoría de la ganancia

La teoría neoclásica considera que el precio es también la suma de las retribuciones de distintos factores de producción, entendidos éstos en forma amplia. Es decir, debe tomarse en consideración todo esfuerzo de los sujetos intervinientes en el proceso de producción. En estas dos citas de Marshall podría exponerse toda la teoría de la formación de la ganancia neoclásica. Esta no es más que la suma del esfuerzo de todas las partes que intervienen en el proceso de producción. "No es verdad que el hilado de algodón en una fábrica, después de descontar el desgaste de la maquinaria, sea el producto del trabajo de los operarios. Es el producto de su trabajo, conjuntamente con el del patrono y los directores subordinados a éste, y del capital empleado, y éste es el producto del trabajo y de la *espera*" (Marshall, 1890, p.482). "(...) [S]i es cierto que el aplazamiento de satisfacciones supone, en general, un sacrificio por parte del que las aplica, lo propio que un esfuerzo adicional por parte del que trabaja, y si es cierto que este aplazamiento permite al hombre utilizar métodos de producción cuyo coste primario es grande, pero mediante los cuales el total del goce queda aumentado, como sucedería mediante un aumento de trabajo, no puede ser cierto que el valor de una cosa dependa sólo de la cantidad de trabajo gastada en ella" (Marshall, 1890, p.483). Y por supuesto todo tiene un precio, cuya magnitud no es más que el resultado de la interacción de la oferta y la demanda. Y dicho precio expresa las relaciones marginales de sustitución, es decir, el valor de cambio en el margen.

Podemos identificar tres modelos para explicar la ganancia o el beneficio en la teoría neoclásica.[1]

I. Por un lado la remuneración a los dueños del capital entendido como medios de producción. En una economía de propiedad privada, si la produc-

[1] Ver Howard (1983) para una discusión sobre las distintas teorías de la ganancia y Dobb (1973) para una discusión acerca de como éstas se relacionan con la distribución del ingreso.

ción necesita de un elemento sobre el cual hay claros derechos de propiedad, la ganancia es la remuneración que requiere el dueño para que éstos elementos sean puestos a disposición del proceso de producción. Éste análisis está mayormente determinado en una economía de intercambio, y el paso a una de producción no tiene mayores diferencias conceptuales. "Ahora hemos de tener en cuenta el hecho de que a veces pueden conseguir nuevas mercancías de distinta manera: mediante transformación técnica, o producción. Es evidente que no adoptarán este método a menos que sea más ventajoso que el simple intercambio; esto quiere decir que sólo será ventajoso convertir un grupo de bienes cambiables en otro grupo mediante producción, si el grupo adquirido tiene un valor de mercado superior al del grupo que se entrega." (Hicks, 1939, p.86) Ésta no es más que una reasignación de los bienes existentes de tal manera que la utilidad resultante sea mayor que la suma de sus componentes. Y esto supone quebrar la unicidad del sujeto-consumidor maximizador en el intercambio para integrar la 'clase de los empresarios,' que únicamente se distingue del anterior en las cualidades de los bienes que intercambia y sobre los cuales tiene exclusiva propiedad. El empresario "adquiere factores y vende productos; su finalidad consiste en llevar al máximo la diferencia entre el valor de ambos." Se convertirá a tal clase si decide usar los recursos en la producción de forma que le quede un excedente positivo. Y agrega en la nota al pie de página: "Además de los factores adquiridos en el mercado, una empresa puede utilizar también factores proporcionados por el empresario mismo." (Hicks, 1939, p.87) Este punto es esencial para considerar el surgimiento de la ganancia del empresario como dueño de un 'factor capital', en este caso como un factor (bien) más. En este mismo marco entra la renta de la tierra, ya que es un factor necesario para la producción.

II. Otra explicación es la remuneración a la espera. Siendo dueños de algo que es necesario para la producción, se entiende que se remunera el sacrificio de no disfrutar del goce inmediato que su consumo generaría. Por otro lado, procesos que llevan más tiempo son en general más productivos. Una conjunción de ambas formas de considerar que el tiempo demanda una remuneración forman parte de la explicación de la ganancia. Wicksell (1901) siguiendo a Böhm-Bawerk expone claramente esta concepción: la capacidad creadora del capital debe hallarse en el elemento tiempo. Este supone dos factores originales: el hombre y la naturaleza (trabajo y tierra). " La productividad de ambos se vuelve mayor si son empleados para fines más distantes que si son empleados para la producción inmediata de mercancías."(Wicksell, 1901, p.150) "El capital es trabajo ahorrado y tierra ahorrada." (Wicksell, 1901, p.154)

III. Finalmente podemos considerar la ganancia como remuneración al riesgo. La ganancia se realiza (o no) en la circulación si es que las *corazonadas* de los empresarios corresponden efectivamente a la valoración de la sociedad. Según Knight (1921) el productor asume la responsabilidad de predecir las necesidades de los consumidores. Y este riesgo tiene su precio: la ganancia del empresario o su 'salario'. Para Schumpeter (1939), es esta búsqueda incesante de ganancias extraordinarias lo que lleva al progreso del capitalismo, gracias a la *innovación* (no sin antes tener procesos destructivos de valor). La teoría neoclácica presupone esta separación ya que la optimización delimita las funciones de cada uno. Este análisis presupone derechos de propiedad sobre dichas capacidades y sobre los frutos de las ganancias asociadas a la innovación. La relación jurídica que se presenta entonces como condición necesaria para que haya un factor remunerado de esta manera es la propiedad privada.

Marx considera que las explicaciones anteriores, en cualquiera de sus formatos, se corresponden a "la tendencia apologética a presentar la ganancia, no como plusvalía, es decir, como trabajo no retribuido, sino como un salario percibido por el propio capitalista a cambio del trabajo por él realizado.” (Marx, 1894, p.371) “El desdoblamiento de la ganancia en beneficio del empresario e interés llevan a su término la sustantivación de la forma de la plusvalía, la cristalización de su forma frente a su sustancia, a su ser.”(Marx, 1894, p.767)

El producto bruto de una economía tiene dos partes fundamentales. Por un lado, aquella parte que debe reutilizarse para continuar el proceso productivo, que incluye los insumos necesarios para el ciclo productivo y el consumo de los trabajadores, que podríamos considerarlo también como parte de estos requerimientos (o sea, para la reproducción de la fuerza de trabajo). Por otro lado, el llamado **excedente** o **producto neto**, que se destina a consumo de los dueños de los medios de producción o a expandir las capacidades productivas (inversión). Una economía puede analizarse en base a estos dos componentes en cuanto a su magnitud y en cómo se distribuye entre determinados clases o grupos. En este caso lo que más interesa es la distribución entre los dueños de los medios de producción que adelantan su capital (capitalistas) y los trabajadores que solo poseen su fuerza de trabajo. En este punto hay una discrepancia mayúscula entre la teoría neoclásica con un enfoque atomístico y el análisis de clases de la teoría clásica.

Según Garegnani (1984) el enfoque basado en el excedente (*surplus approach*) es el punto de partida correcto para un análisis económico del valor y de la distribución. Tanto los modelos sraffianos como marxistas tienen como fundamento que las ganancias son resultado de este excedente, entendido éste como la diferencia entre los requerimientos para producir y el producto. La teoría económica clásica debe estudiar como a través de una economía capitalista, donde las mercancías se intercambian libremente en el mercado usando precios, se explica la determinación conjunta de los precios y las variables que hacen a la distribución del excedente.

1.4. Diferencias epistemológicas con la microeconomía neoclásica

Siguiendo a Lavoie (2009, cap. 1) podemos caracterizar otras diferencias epistemológicas entre la microeconomía heterodoxa y la neoclásica. En las secciones anteriores señalamos las diferencias entre análisis centrados en la escasez vs. aquellos centrados en la producción o reproducción. A continuación se señalan otras diferencias.

Individualismo vs. holismo. La visión neoclásica se basa en un invidivualismo metodológico donde el individuo autónomo y soberano es el centro del análisis. Los mercados no son más que la suma de las contribuciones individuales, aún considerando las potenciales interacciones y comportamientos estratégicos. Cabe destacar que si asumimos heterogeneidad entre los individuos, los componentes agregados heredan pocas atribuciones de los elementos individuales, con lo cual, aún cuando se justifique la necesidad de agregar individuos, en general hay un corte metodológico al pasar del individuo al fenómeno social. En el enfoque heterodoxo, sin embargo, se asume que los individuos, como seres sociales, pertenecen a entidades (clases, instituciones, etc.) de las cuales no necesariamente se puede establecer una derivación metodológica. El todo es más que la suma de las partes. Estas entidades no son imperfecciones del ideario de un mercado atomizado, pero parte central del sistema económico, brindando estabilidad y estructura. Podemos llamar a la visión heterodoxa como holística u organicista.

El principio de uniformidad. A partir del análisis heterodoxo se asume que los productos se intercambian a través de precios que son consistentes con la reproducción simple y con una determinada distribución del excedente entre las clases sociales, en particular, trabajadores y capitalistas, luego agregando los dueños de los factores fijos (tierra). Éstos precios son los mismos para todas las unidades producidas. Vamos a considerar así una economía en el **largo plazo**, o **equilibrio**, o también llamado **centro de gravedad**, donde vamos a asumir una tasa de ganancia y salarios para trabajo homogéneo uniforme entre todos los sectores. Si no hubiera uniformidad habría movilidad de capitales y trabajadores entre sectores en busca de mayores beneficios o salarios. Para que este proceso funcione se asume libre movilidad de capitales y trabajadores, y ausencia de barreras a la entrada, ver la discusión de Petri (1989) y Kurz y Salvadori (1995). Los precios de las mercancías que cumplen estas condiciones de uniformidad se denominan precios naturales, precios normales o también **precios de producción**. Estos precios son concebidos como valores teóricos, en cuanto tales, distintos a los precios observados en cada momento del tiempo, que son llamados precios de mercado.

Racionalidad sustantiva. La microeconomía neoclásica parte del supuesto que establece que los individuos están dotados de una racionalidad sustantiva. La mayoría de los desarrollos se basan en un proceso de maximización u optimización haciendo uso frecuente de esta racionalidad. En el enfoque heterodoxo la racionalidad expresada de esta manera no juega un rol tan central. Sin embargo, aunque en muchos casos no se considera explícitamente el proceso de optimización que se le atribuye a todos los actores económicos (un tema muy importante en la teoría neoclásica), la uniformidad en los modelos heterodoxos asume que implícitamente los individuos están maximizando beneficios y/o bienestar. Las firmas que componen los sectores fluyen en busca de las mayores ganancias, entendidas estas como un porcentage que se aplica al capital invertido. Por otro lado los trabajadores también se movilizan para encontrar el mejor salario dado su esfuerzo. Finalmente, consideramos que los consumos observados son también resultado de un proceso de optimización, dentro de las posibilidades técnicas de la economía. Entonces no es, como muchas veces se argumenta, que la teoría sraffiana o marxista no tiene un proceso de optimización adecuado, sino por el contrario, éste juega un rol central en la determinación del equilibrio. Sin embargo, al no partir de procesos de maximización individuales que son agregados, ésta no se explicita.

Actitud frente al mercado. La mayoría de los modelos neoclásicos presuponen que el mejor resultado es alcanzado con la libre empresa y el *laissez-faire*, y que para ello el libre mercado y la competencia pura son la mejor opción. En los modelos heterodoxos, en particular en los sraffianos y marxistas, el libre mercado no tiene asociado resultados de eficiencia. La competencia se asume como una característica dada de una economía capitalista. En este libro no vamos a considerar diferencias en el poder de mercado de las firmas (ej. monopolio, oligopolio), aunque esto juega un rol central en el análisis neoclásico o en el kaleckiano. La posición de largo plazo que se asume en los modelos analizados aquí implícitamente asume que posiciones de mercado monopólicas son susceptibles de desaparecer eventualmente.

1.5. Recorrido de este libro

Los primeros capítulos desarrollan el modelo clásico de precios de producción en su versión sraffiana. El Cap. 2 empieza por un análisis del efecto de las condiciones técnicas sobre los modelos de reproducción simple y los límites a la tasa de ganancia. En ste capítulo apaece un concepto central que es el de excedente. El Cap. 3 considera explíticamente los efectos distributivos de trabajo y capital, o mejor dicho, entre los capitalistas y los trabajadores. Éstos dos primeros capítulos se basan en un modelo de dos mercancías, donde se puede determinar analíticamente todos los precios, y la relación entre la tasa de ganancia y el salario. El Cap. 4 lo generaliza para una cantidad genérica de mercancías. En este capítulo se desarrolla la idea de la mercancía estándar. El Cap. 5 analiza una economía con más de una técnica, dando lugar a una discusión del concepto de capital (en base a la Controversia de Cambridge), en particular, efectos de precio y reales de Wicksell.

Los capítulos 6 y 7 desarrollan el modelo marxista en términos de la centralidad del valor trabajo. A diferencia de los anteriores se usa una cesta básica de mercancías que determinan el salario real. Éste último modelo es también usado en los modelos sraffianos y en la concepción clásica de la determinación del salario real. De ahí se definen los conceptos básicos de plusvalía y explotación, en particular, el Teorema Fundamental Marxiano que muestra que no hay ganancia sin explotación. Dentro del marco marxista es de debate la forma correcta de realizar la conexión entre los valores-trabajo y los precios de producción, lo que se llamó el problema de la transformación. Aún con grandes diferencias conceptuales, los modelos sraffianos y marxistas coinciden en la importancia del factor trabajo para determinar los precios relativos de una economía.

En los últimos capítulos consideramos extensiones del modelo de reproducción simple. El Cap. 8 estudia modelos de producción conjunta, puros, de capital fijo, y los de determinación de renta diferencial para factores primarios escasos. El Cap. 9 utiliza el modelo sraffiano básico con preferencias sobre los bienes. Finalmente el Cap. 10 presenta una aproximación simple a modelos de inflación basados en estos esquemas económicos, que dan lugar a la llamada inflación por puja distributiva que es típica de los modelos post-keynesianos.

Capítulo 2

Teoría sraffiana (i)

2.1. Introducción

Este capítulo y los siguientes representan la economía clásica tal como es desarrollada en Sraffa (1960) teniendo en cuenta las condiciones técnicas de producción que determinan las posibilidades de tener o no un excedente o producto neto.

En este capítulo vamos a analizar los límites a la tasa de ganancia en base a las condiciones productivas, centrándonos en el caso de dos mercancías. En el siguiente, Cap. 3, introducimos el trabajo como determinante esencial del proceso productivo, y el salario explícitamente como una variable a tener en cuenta en la distribución. La generalización a n mercancías aparece en el Cap. 4. El capital utilizado para producir se asume como **circulante** porque se consume en su totalidad en el periodo, en contraposición con el capital fijo que será analizado en el Cap. 8.

Podemos pensar que el modelo que se utiliza en este capítulo y los siguientes corresponde a una economía dinámica, de la cual se toma una foto en un momento del tiempo y se analiza como si fuera un punto fijo. En este caso no hace falta referirse a dotaciones o escasez relativa para explicar los valores de cambio en una economía, sino a qué condiciones aparecen como determinantes para reproducir el ciclo.

2.2. Modelo de subsistencia

Supongamos una economía con dos bienes, trigo e hierro, y dos sectores, campo (sector 1) e industria (sector 2), en un modelo de **reproducción simple**. Se produce estrictamente lo necesario para reproducir el ciclo, sin excedente, y asumimos que los ciclos son periodos de igual duración (ej. un año). Este modelo se llama de **subsistencia**. Se podría pensar que el consumo de los trabajadores forma parte de los requerimientos de insumos de cada sector, y que como tal se contabilizan implícitamente.[1] Luego vamos a evaluar a los trabajadores de otra forma, ya sea computando el salario como parte del excedente (Cap. 3) o considerando explíticamente las mercancías consumidas por los trabajadores (Cap. 6).

Consideremos el ejemplo de Sraffa (1960, p.3):

$$280 \; ton.\; trigo \oplus 12 \; ton.\; hierro \Rightarrow 400 \; ton.\; trigo,$$

$$120 \; ton.\; trigo \oplus 8 \; ton.\; hierro \Rightarrow 20 \; ton.\; hierro.$$

Lo que se encuentra del lado izquierdo de $\Rightarrow$ son los insumos que se necesitan para producir lo que está del lado derecho. Así podemos definir a $\Rightarrow$ como "produce". El símbolo $\oplus$ indica que distintos bienes se usan como insumos y lo definimos como "junto con". En este ejemplo, trigo e hierro se usan para producir también trigo e hierro. Notar que todo lo que se produce se usa como insumo en alguno de los dos sectores. Es decir, del total de 400 ton. trigo producidas, 280 se necesitan para producir trigo y 120 para producir hierro, mientras que de las 20 ton. hierro, 12 son para producir el trigo y 8

[1] El propio Sraffa (1960, cap.1) lo justifica diciendo "hemos considerado los salarios como consistentes en los bienes necesarios para la subsistencia de los trabajadores, de modo que entraban en el sistema en pie de igualdad con el petróleo para las máquinas o los alimentos para el ganado".

para el hierro mismo.

Las cantidades producidas se pueden escribir de la siguiente manera:

$$a_{11}x_1 \textit{ ton. trigo} \oplus a_{21}x_1 \textit{ ton. hierro} \Rightarrow x_1 \textit{ ton. trigo},$$

$$a_{12}x_2 \textit{ ton. trigo} \oplus a_{22}x_2 \textit{ ton. hierro} \Rightarrow x_2 \textit{ ton. hierro}.$$

En este modelo x_1 representa la cantidad bruta producida de trigo y x_2 la cantidad bruta de hierro. $a_{11} = 280/400$ corresponde a la cantidad de trigo requerida por unidad producida de trigo; $a_{21} = 12/400$ corresponde a la cantidad de hierro requerida por unidad producida de trigo; $a_{12} = 120/20$ es la cantidad de trigo requerida por unidad producida de hierro; y finalmente $a_22 = 8/20$ la cantidad de hierro requerida por unidad producida de hierro. Podemos definir a los los valores $a_{ij},\ i, j = 1, 2$ como los **coeficientes técnicos** y $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]'$ como el vector de **productos brutos**.

Si dividimos cada igualdad por lo que se produce tenemos,

$$a_{11} \textit{ trigo} \oplus a_{21} \textit{ hierro} \Rightarrow 1 \textit{ ton. trigo},$$

$$a_{12} \textit{ trigo} \oplus a_{22} \textit{ hierro} \Rightarrow 1 \textit{ ton. hierro}.$$

Tenemos así la representación del **sistema de cantidades**:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= x_2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

En este sistema, cada ecuación representa del lado izquierdo los requerimientos de insumos de las dos mercancías para producir lo que está en el lado derecho. Usando la notación del Cap. 4, tenemos que los requerimientos de insumos se pueden escribir usando la matriz insumo-producto, $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. El vector de cantidades es $\boldsymbol{x} = [x_1 \quad x_2]'$. Entonces la ecuación anterior se podría reescribir como $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{x}$.

Si asumimos que $x_i > 0$, $i = 1, 2$, es decir, se produce una cantidad positiva de los dos bienes, entonces reescribiendo el sistema en cantidades como

$$(1 - a_{11})x_1 = a_{12}x_2,$$

$$a_{21}x_1 = (1 - a_{22})x_2,$$

implica que

$$(1 - a_{11}) > 0, \ (1 - a_{22}) > 0. \tag{2.2}$$

Por otro lado, tenemos $x_2/x_1 = (1 - a_{11})/a_{12} = a_{21}/(1 - a_{22})$. Entonces,

$$(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21} = 0. \tag{2.3}$$

El resultado es que para que exista una solución positiva (no trivial, $x_1 = x_2 = 0$) al sistema de cantidades, las dos condiciones (2.2)-(2.3) se tienen que cumplir.

Si planteamos el **sistema de precios**, obtenemos

$$\begin{aligned} p_1a_{11} + p_2a_{21} &= p_1, \\ p_1a_{12} + p_2a_{22} &= p_2. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Para el sistema en precios planteamos $\boldsymbol{p} = [p_1 \ \ p_2]$, tal que $\boldsymbol{pA} = \boldsymbol{p}$.

Notar que en este modelo los precios son determinados por los costos. Para producir una unidad de la mercancía 1, se necesitan a_{11} unidades de la mercancía 1 y a_{21} unidades de la mercancía 2. Para producir una unidad de la mercancía 2, se necesitan a_{12} unidades de la mercancía 1 y a_{22} unidades de la mercancía 2. Éstas se valúan de la misma manera como insumos que como productos. Entonces, en este modelo de subsistencia, los precios a los cuales las mercancías se intercambian para mantener las condiciones de reproducción simple son tales que se venden a los costos de producción. De hecho podemos pensar que en este modelo el producto bruto,

$$p_1x_1 + p_2x_2,$$

es igual al costo de producirlo,

$$(p_1a_{11} + p_2a_{21})x_1 + (p_1a_{12} + p_2a_{22})x_2.$$

Las mismas condiciones (2.2) y (2.3) son necesarias para tener precios positivos, $p_i > 0$, $i = 1, 2$.

Usando p_1 como *numéraire* en (2.4) tenemos

$$p_2/p_1 = (1 - a_{11})/a_{21} = a_{12}/(1 - a_{22}). \tag{2.5}$$

El precio relativo depende así de cuánto entra en su propia producción y cuánto entra como insumo en la otra mercancía.

En el ejemplo de trigo e hierro,

$$280 \ \textit{ton. trigo} \oplus 12 \ \textit{ton. hierro} \Rightarrow 400 \ \textit{ton. trigo},$$

$$120 \ \textit{ton. trigo} \oplus 8 \ \textit{ton. hierro} \Rightarrow 20 \ \textit{ton. hierro},$$

hay un único conjunto de valores de cambio que si se adoptara permitiría que el proceso se repita: *10 ton. de trigo por 1 ton. de hierro*. Es decir, si hacemos $p_1 = 1$ como el precio del trigo y $p_2 = 10$ como el precio del hierro, entonces

$$280/400 + 10 \times 12/400 = 1,$$

$$120/20 + 10 \times 8/20 = 10.$$

Los precios que estamos determinando son en realidad valores de cambio entre las mercancías. Cabe mencionar, por lo menos una vez, que lo que nos interesa son los precios relativos. De hecho el mismo modelo lo podríamos reescribir usando $p_2 = 1$ como *numéraire*, teniendo $p_1 = 1/10$ y las igualdades

$$1/10 \times 280/400 + 12/400 = 1/10,$$

$$1/10 \times 120/20 + 8/20 = 1.$$

2.3. Modelo de producción con excedente

Supongamos una economía que tiene un **excedente**, donde se produce lo suficiente para reproducir el ciclo y hay un excedente, $\boldsymbol{c} = [c_1, c_2]' \geq \mathbf{0}$. El excedente se define implícitamente como aquello que no es necesario para el proceso de producción y que queda disponible para consumo o inversión. Por ahora no vamos a analizar cómo se distribuye este excedente, aunque podríamos pensar que si el consumo de los trabajadores ya está contabilizado en los insumos sectoriales, entonces, esto corresponde al consumo de los dueños de los medios de producción. Este modelo lo podemos escribir como

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + c_1 &= x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + c_2 &= x_2. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Usando el álgebra matricial del Cap. 4, este sistema es $\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{x}$.

El sistema es productivo si tiene solución $x_i > 0$, $i = 1, 2$, para cada $c_i > 0$, $i = 1, 2$. Reescribiendo el sistema como

$$(1 - a_{11})x_1 = a_{12}x_2 + c_1,$$

$$(1 - a_{22})x_2 = a_{21}x_1 + c_2,$$

implica que

$$1 - a_{11} > 0, \; 1 - a_{22} > 0, \tag{2.7}$$

Por otro lado,

$$x_1 = (a_{12}x_2 + c_1)/(1 - a_{11}).$$

$$((1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21})\, x_2 = a_{21}c_1 + (1 - a_{11})c_2.$$

Entonces,

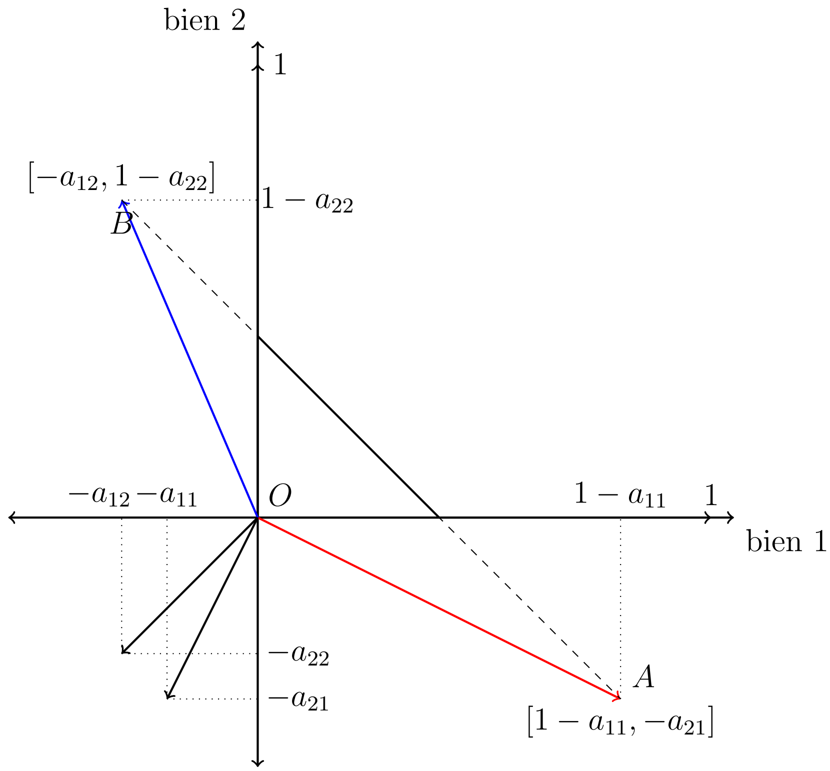
$$(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21} > 0. \tag{2.8}$$

El resultado es que para que exista una solución positiva al sistema de cantidades en el modelo con excedente, las dos condiciones (2.7)**-**(2.8) **se tienen que cumplir.**

Consideremos un análisis gráfico de este modelo. La Figura 2.1 muestra por un lado los requerimientos de insumos por unidad de producción para los dos bienes, que aparecen representados como vectores de valor negativo, $[-a_{11}, -a_{12}]$ para el bien 1 y $[-a_{21}, -a_{22}]$ para el bien 2. Los productos netos de cada industria se pueden representar como el vector $[1-a_{11}, -a_{12}]$ para el bien 1 (en el cuadrante sureste) y $[-a_{21}, 1-a_{22}]$ para el bien 2 (en el cuadrante noroeste). El intervalo que conecta los dos vectores (o une los puntos A con B), en el cuadrante noreste (no negativo) determina las posibilidades de excedente por unidad producida de cada bien, $[c_1/x_1, c_2/x_2]$. De hecho para que el sistema sea productivo necesitamos que dicho intervalo cruce por el cuadrante de valores positivos.

Cabe destacar que en el caso del modelo de subsistencia el intervalo que une A con B tiene que pasar por el origen. En este caso no hay posibilidad de tener un consumo adicional por fuera de los insumos. En base a esta figura podemos también ver las condiciones (2.7)-(2.8) discutidas anteriormente. Para que existan posibilidades de consumo neto positivo entonces el ángulo formado por AOB tiene que ser menor a $180^{\odot}$. De ahí por un lado los supuestos de $1 - a_{11} > 0$ y $1 - a_{22} > 0$ en (2.7). Por otro lado la pendiente de OA tiene que ser más achatada que (o sea en valor absoluto menor que) la de OB y por lo tanto $\frac{a_{21}}{1-a_{11}} < \frac{1-a_{22}}{a_{12}}$ que es la condición (2.8).

Figura 2.1: Modelo con excedente



Supongamos el modelo anterior con precios,

$$
\begin{aligned}
(p_1a_{11} + p_2a_{21})(1 + r) = p_1, \\
(p_1a_{12} + p_2a_{22})(1 + r) = p_2.
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

En este modelo introdujimos r definida como la tasa de ganancia en precios. Siguiendo con la tradición clásica, la ganancia se entiende como una proporción extra de los insumos valuados en precios, o costo de producción. Podemos llamar a estos costos como **capital**. Otra forma de ver a r es como el beneficio que el capitalista individual obtiene por el empleo del capital en la producción, es decir, como su "cuota de participación" en la distribución del excedente (Ciccone, Fratini, y Trezzini, 2009). Los precios aparecen así íntimamente ligados a esta forma de distribuir el excedente, en forma proporcional a los capitales invertidos. En esta misma línea, Lavoie (2009) comenta que la mayoría de los modelos post-keynesianos adoptan una determinación de precios con un mark-up por encima de los costos unitarios (ver también la discusión en Lee, 2006).

El sistema se puede escribir en términos del modelo de subsistencia, ecs. (2.2)-(2.3), con las siguientes condiciones:

$$1 - (1 + r)a_{11} > 0, \; 1 - (1 + r)a_{22} > 0, \tag{2.10}$$

$$(1 - (1 + r)a_{11})(1 - (1 + r)a_{22}) - (1 + r)^2 a_{12}a_{21} = 0. \tag{2.11}$$

Para entender la solución anterior podríamos redefinir $\tilde{a}_{ij} = (1 + r)a_{ij}$, $i, j = 1, 2$, y resolver el sistema de subsistencia con las condiciones de modelo de subsistencia.

Definamos la ecuación

$$
\begin{aligned}
f(r) &= (1 - (1 + r)a_{11})(1 - (1 + r)a_{22}) - (1 + r)^2 a_{12}a_{21} \\
&= 1 + (1 + r)^2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) - (1 + r)(a_{11} + a_{22}).
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

Esto da lugar a una ecuación cuadrática, que como ejemplo se grafica en la Figura 2.2. La idea es encontrar las dos raíces r_1 y r_2 que satisfagan $f(r) = 0$. Notar que $f(0) > 0$ (usando (2.8)). Por otro lado, $f'(r) = 2(1 + r)(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) - (a_{11} + a_{22})$ y $f'(0) \leq 0$ para $a_{ii} \in [0, 1]$, $i = 1, 2$.

Por conveniencia definimos $\lambda = (1 + r)^{-1}$, tal que

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{12}a_{21} = 0$$

o

$$\lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0.$$

La solución a este problema es $\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}\right)$. Definamos λ_1 a la solución con $+$ y λ_2 a la solución con $-$. Notar que las soluciones son reales porque $(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} > 0$. Además $\lambda_1 > \lambda_2$ lo que implica que $r_1 < r_2$.

De las dos soluciones tomemos λ_1 que se corresponde con el $+$ en la raíz. Notar que $\lambda_1 \geq 0$. Vamos a demostar que $\lambda_1 < 1$, lo que implica que $r_1 > 0$. Supongamos lo contrario, $\lambda_1 \geq 1$ o $r_1 \leq 0$. Entonces,

$$\frac{1}{2}\left(a_{11} + a_{22} + \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}\right) \geq 1,$$

$$\sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \geq 2 - (a_{11} + a_{22}).$$

Tomando el cuadrado en ambos lados de la igualdad,

$$(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \geq 4 - 4(a_{11} + a_{22}) + (a_{11} + a_{22})^2,$$

entonces tenemos que

$$0 \geq 1 - (a_{11} + a_{22}) + (a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}) = (1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21},$$

lo cual contradice la condición (2.8). Entonces, $r_1 > 0$ o $1 > \lambda_1 > 0$.

Veamos ahora los precios,

$$p_1a_{11} + p_2a_{21} = \lambda_1 p_1,$$

$$p_1a_{12} + p_2a_{22} = \lambda_1 p_2,$$

o

$$p_1(\lambda_1 - a_{11}) = p_2a_{21},$$

$$p_1a_{12} = p_2(\lambda_1 - a_{22}).$$

Supongamos que $\lambda_1 \leq a_{11}$. Entonces,

$$\frac{1}{2}\left(a_{11} - a_{22} - \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}\right) \geq 0,$$

lo cual implica (chequear) que $0 \geq 4a_{12}a_{21}$ que es una contradicción. Entonces,

$$\lambda_1 > a_{11},\ \lambda_1 > a_{22}. \tag{2.13}$$

Por otro lado,

$$p_2/p_1 = (\lambda_1 - a_{11})/a_{21} = a_{12}/(\lambda_1 - a_{22}) > 0, \tag{2.14}$$

es decir, los precios relativos son positivos con r_1.

Tomemos la otra solución, s_2, y supongamos que $r_2 > 0$. Entonces,

$$p_1(\lambda_2 - a_{11}) = p_2a_{21},$$

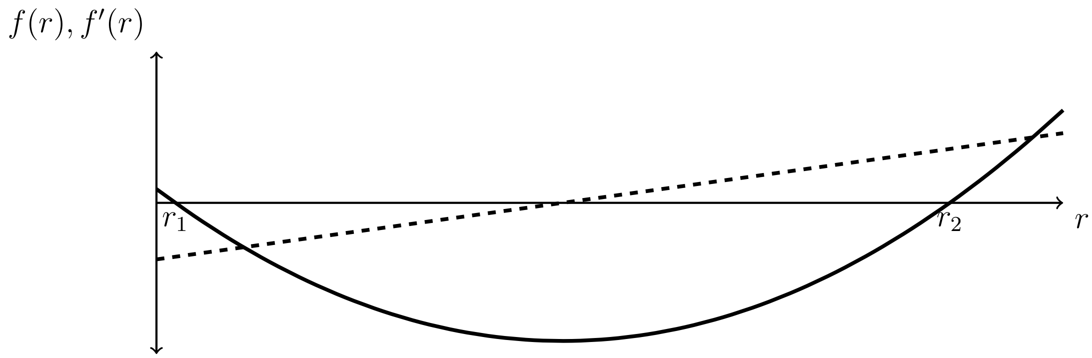
$$p_1a_{12} = p_2(\lambda_2 - a_{22}).$$

Supongamos que $\lambda_2 \geq a_{11}$. Entonces, al igual que antes podemos obtener

$$\frac{1}{2}\left(a_{22} - a_{11} - \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}\right) \geq 0,$$

que es una contradicción. Como resultado, $\lambda_2 < a_{ii}$, $i = 1, 2$. Esto lleva a

Figura 2.2: Gráfico de la función $f(r)$ (linea sólida) y $f'(r)$ (linea punteada)



Nota: Este ejemplo corresponde a los valores del ejercicio de Sraffa (p.7), ver al final del Capítulo, donde $r_1 = 0{,}25$ y $r_2 = 10{,}5$.

$p_2/p_1 < 0$.

Si el sistema es productivo, existe una única solución con precios positivos.

El procedimiento para encontrar la tasa de ganancia y los precios relativos es el siguiente. Primero encontrar λ_1 o r_1. Notar que esto está determinado por la condiciones técnicas de producción y en particular por el excendente. Luego,

$$p_2/p_1 = (\lambda_1 - a_{11})/a_{21} = a_{12}/(\lambda_1 - a_{22}). \tag{2.15}$$

Para usos posteriores, definimos $R = r_1$ como la máxima tasa de ganancia obtenida que es compatible con precios relativos positivos en un sistema de reproducción simple. Como veremos en el próximo capítulo cuando consideremos explícitamente el salario, la tasa de ganancia de una economía tiene que satisfacer $0 \leq r \leq R$.

Estática comparada

Evaluemos ahora el efecto de un cambio en el salario de subsistencia (un incremento del consumo de los trabajadores) y/o un cambio en las condiciones técnicas de producción (un cambio en los coeficientes técnicos).

Supongamos una tecnología B tal que $b_{ij} \geq a_{ij}$, $i, j = 1, 2$. Asumamos que la economía B es productiva: $1 - b_{ii} > 0,\ i = 1, 2, (1 - b_{11})(1 - b_{22}) - b_{12}b_{21} > 0$.

$$f^b(r^b) = (1 - (1 + r^b)b_{11})(1 - (1 + r^b)b_{22}) - (1 + r^b)^2 b_{12}b_{21} = 0.$$

Tomemos ahora la ecuación,

$$f^b(r^a) = (1 - (1 + r^a)b_{11})(1 - (1 + r^a)b_{22}) - (1 + r^a)^2 b_{12}b_{21}.$$

Notar que

$$(1 - (1 + r^a)b_{ii}) \leq (1 - (1 + r^a)a_{ii}),\ i = 1, 2,$$

$$-(1 + r^a)b_{ij} \leq -(1 + r^a)a_{ij},\ i \neq j.$$

Entonces, $f^b(r^a) < 0$. Como f^b es una función cuadrática en r con $f^b(r^b) = 0$ y $f^b(r) > 0$ para $r \in [0, r^b)$, entonces $r^a > r^b$.[2]

2.4. Industrias básicas y no básicas

Una mercancía $i = 1, 2$ entra **directamente** en la producción de la mercancía $j = 1, 2$ si $a_{ij} > 0$, mientras que definimos que entra **indirectamente** si $a_{ij} = 0$ pero existe otra mercancía h tal que $a_{ih}a_{hj} > 0$.

Definimos que una mercancía es **básica** si entra directamente o indirectamente en la producción de todas las mercancías, caso contrario es **no básica**. Para el caso de dos bienes, la mercancía 1 es básica si

$$a_{11} + a_{11}^2 + a_{12}a_{21} > 0,$$

$$a_{12} + a_{12}a_{22} + a_{11}a_{12} > 0,$$

mientras que la 2 es básica si

[2]Este mismo resultado lo vamos a encontrar en el Cap. 4. La tasa de ganancia r es una función creciente en todos los elementos de $\boldsymbol{A}$.

$$a_{22} + a_{22}^2 + a_{21}a_{12} > 0,$$

$$a_{21} + a_{22}a_{21} + a_{21}a_{11} > 0.$$

Supongamos que $a_{12} > 0$ pero $a_{21} = 0$. En este caso la industria o mercancía 1 es **básica** mientras que la 2 es **no básica**. Ver más adelante la Sec. 4.4 para una definición formal sobre esto. Por ahora notar que las restricciones implican que la mercancía 1 entra como insumo para producir ambas mercancías, mientras que las 2 solo lo hace para la 2, y no para la 1. Esto determina que la mercancía 1 impone restricciones a cuanto puede producirse y sin ella el sistema económico no es factible.

Supongamos el modelo anterior con precios,

$$(p_1a_{11})(1 + r) = p_1,$$

$$(p_1a_{12} + p_2a_{22})(1 + r) = p_2.$$

En este caso $r = 1/a_{11} - 1$. Además $p_2/p_1 = a_{12}/(a_{11} - a_{22})$. Sólo las industrias básicas importan para la determinación de la tasa de ganancia.

Si la tasa de ganancia se determina en los sectores básicos, ¿cómo podemos garantizar que es rentable producir en lo no básicos? Notar que puede darse el caso que la tasa de ganancia, determinada en el sector 1 arriba no sea compatible con la producción en el sector 2. Usemos $p_1 = 1$ como *numéraire*, y denotemos r_1 a la tasa de ganancia del sector 1. Entonces tenemos la condición de no negatividad de p_2 que viene dada por $1 - a_{22}(1 + r_1) > 0$ para la factibilidad del sector 1. Notar que esta condición la podemos establecer como $a_{11} > a_{22}$.

Notar que el mismo problema ocurre si tenemos que $a_{12} = 0$, es decir que la mercancía 1 no entra como insumo en la producción de la 2 (este problema también se llama de mercancías básicas auto-reproducibles). Así los dos sectores no tienen conexión entre sí, dando lugar a distintas tasas de ganancia potenciales.

2.5. Ejercicios

Ejercicio 2.5.1. *Encontrar los precios para el siguiente ejemplo (Woods, 1990, p.17):*

$$280\ trigo \oplus 10\ hierro \Rightarrow 400\ trigo,$$

$$120\ trigo \oplus 10\ hierro \Rightarrow 20\ hierro.$$

(Solución: 12 ton. trigo = 1 ton. hierro.)

Ejercicio 2.5.2. *Encontrar los precios para el siguiente ejemplo (Sraffa, 1960, p.7):*

$$280\ ton.\ trigo \oplus 12\ ton.\ hierro \Rightarrow 575\ ton.\ trigo,$$

$$120\ ton.\ trigo \oplus 8\ ton.\ hierro \Rightarrow 20\ ton.\ hierro.$$

(Solución: 15 ton. trigo = 1 ton. hierro, tasa de beneficios de 0.25 o 25 %.)

Ejercicio 2.5.3. *Encontrar los precios para el siguiente ejemplo (Abraham-Frois y Berrebi, 1997, p.43): Supongamos* $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 56/115 & 24/115 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{bmatrix}$*. El autovalor dominante es* $\lambda_1 = \frac{1}{1+R} = \frac{92}{115}$ *o* $R = 0{,}25$*. Entonces* $56/115p_1 + 0{,}6p_2 = 92/115p_1$ *o* $0{,}6p_2 = 36/115p_1$.

Capítulo 3

Teoría sraffiana (ii)

3.1. Introducción

En el capítulo anterior estudiábamos los procesos de producción como intercambios entre entes (industrias o sectores) autónomos. Una omisión importante es que no se consideraba al trabajo explíticamente como elemento central de todo proceso económico, donde las relaciones económicas no son entre mercancías sino entre seres humanos. Implícitamente, tal como fuera mencionado, en el capítulo anterior considerabamos que los requerimientos para que se lleve a cabo el trabajo necesario estaban considerados dentro de los requerimientos de insumos.

Un punto importante que distingue la teoría clásica de la distribución se encuentra en la particular explicación de la tasa de salario real, es decir de la cantidad de bienes que un trabajador recibe por unidad de tiempo de trabajo (Ciccone, Fratini, y Trezzini, 2009). Según esta teoría el nivel de salario real está determinado por circunstancias de naturaleza social y económica, que no necesariamente pueden estudiarse en un marco de oferta y demanda (se diferencia así de la teoría marginalista). Encontramos en éstas factores históricos e institucionales, así como también relaciones contractuales. Detrás de esta determinación está lo que podemos llamar, sin entrar en profundizaciones conceptuales, **lucha de clases**, que en terminología marginalista podemos llamar poder de negociación.[1]

En este capítulo vamos a considerar al salario como una variable distributiva que se paga una vez que el proceso productivo ha terminado. En realidad no hay diferencia, excepto en el álgebra, entre considerar los salarios como *adelantados* al comienzo del proceso de producción *ex-ante* o que se pagan *ex-post*. En el primer caso entran como parte del capital adelantado, sobre lo cual se aplica la tasa de ganancia. En el segundo caso, no forma parte del capital circulante. Siguiendo con la notación de Sraffa (1960) y Pasinetti (1977) solo consideramos aquí el salario pagado *ex-post*, para explorar explícitamente las tensiones distributivas entre capitalistas y trabajadores.

En el Cap. 6 vamos a considerar al salario como determinado explíticamente como el resultado de requerimientos de consumo de una canasta básica, de subsistencia, que viene dada exógenamente como un dato. (El término subsistencia no necesariamente hace referencia a una canasta física, sino a una necesidad histórico-social de consumo de los trabajadores para su reproducción.) De hecho, la diferencia entre la valoración de la canasta de subsistencia y lo pagado a los trabajadores determina la tasa de plusvalía, un elemento central en el análisis marxista. De todas maneras, tal como veremos en el Cap. 7, el salario monetario es el principal vehículo para llevar a cabo la explotación capitalista y determinar la tasa de plusvalía. Así, especificar ex-ante las mercancías que componen el salario real no es necesario ni en la corriente sraffiana ni en la marxista.

3.2. Modelo con salario nominal

Supongamos dos mercancías, dos procesos, y cantidades de trabajo necesarias para cada uno, $\boldsymbol{\ell} = [\ell_1, \ell_2] > \mathbf{0}$, expresadas como tiempo de trabajo

[1] Ver también Stirati (1991) para una discusión.

por unidad de mercancía.[2]

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 \oplus a_{21}x_1 \oplus \ell_1 x_1 &\Rightarrow x_1, \\
a_{12}x_2 \oplus a_{22}x_2 \oplus \ell_2 x_2 &\Rightarrow x_2.
\end{aligned}
$$

Supongamos ahora que el salario se paga al final del proceso de producción, como parte del excedente. En este caso, el excedente se distribuye entre los capitalistas y los trabajadores. Para eso hay que determinar la *curva de salarios-tasa de ganancia* (w, r).

Se usa w como el salario por unidad de trabajo. El modelo anterior con precios (p_1, p_2, w, r) es,

$$
\begin{aligned}
(p_1 a_{11} + p_2 a_{21})(1+r) + w\ell_1 = p_1, \\
(p_1 a_{12} + p_2 a_{22})(1+r) + w\ell_2 = p_2.
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

Podemos pensar que $w\boldsymbol{\ell}$ es un vector de excedentes, en exceso de los "beneficios" obtenidos por una tasa de ganancia dada más el pago de los insumos requeridos para la producción. Entonces, las condiciones de viabilidad son tal que $w\boldsymbol{\ell} \gg \mathbf{0}$ si y solo si

$$1 - (1+r)a_{11} > 0, \ 1 - (1+r)a_{22} > 0, \tag{3.2}$$

$$(1 - (1+r)a_{11})(1 - (1+r)a_{22}) - (1+r)^2 a_{12}a_{21} > 0. \tag{3.3}$$

Definamos

$$f(r) = (1 - (1+r)a_{11})(1 - (1+r)a_{22}) - (1+r)^2 a_{12}a_{21},$$

tal que $f(0) > 0$ y existe R con $f(R) = 0$. Ésta es la menor raíz característica de $f(r)$, tal como fuera discutido en el Cap. 2.

Definamos R como la tasa de beneficio máxima, que implica que los sa-

[2]Para esta Sección seguimos la modelización de Woods (1990).

larios con $w = 0$. Para probar esto notemos que

$$p_1 = (w\ell_1 + (1+R)p_2 a_{21})/(1-(1+R)a_{11}),$$

entonces,

$$p_2[(1-(1+R)a_{11})(1-(1+R)a_{22}) - (1+R)^2 a_{12}a_{21}]$$

$$= w(\ell_1 a_{12}(1+R) + \ell_2(1-(1+R)a_{11}).$$

Como la parte en $[\cdot]$ es 0, entonces $w = 0$, tal que

$$\begin{aligned}(p_1 a_{11} + p_2 a_{21})(1+R) &= p_1, \\ (p_1 a_{12} + p_2 a_{22})(1+R) &= p_2. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Esto implica que los beneficios absorven el producto neto total. Esto daría lugar a un modelo de **teoría del valor de puro capital**.

3.3. Forma de la curva salario-tasa de ganancia

Usemos ahora $p_1 = 1$ como *numéraire*:[3]

$$\begin{aligned}(a_{11} + p_2 a_{21})(1+r) + w\ell_1 &= 1, \\ (a_{12} + p_2 a_{22})(1+r) + w\ell_2 &= p_2. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Entonces podemos resolver:

$$w^{(1)} = \frac{(1-(1+r)a_{11})(1-(1+r)a_{22}) - (1+r)^2 a_{12}a_{21}}{\ell_1(1-(1+r)a_{22}) + (1+r)\ell_2 a_{21}} \equiv f(r)/g(r), \tag{3.6}$$

[3]Para esta Sección seguimos la modelización de Woods (1990).

$$p_2^{(1)} = \frac{\ell_2(1-(1+r)a_{11})+(1+r)\ell_1 a_{12}}{\ell_1(1-(1+r)a_{22})+(1+r)\ell_2 a_{21}} \equiv h(r)/g(r). \tag{3.7}$$

Notar que

$$h(r) > 0,\ \ g(r) > 0, \text{para } 0 \leq r \leq R.$$

$$f(r) > 0, \text{para } 0 \leq r < R,$$

$$f(r) = 0, \text{para } r = R.$$

Entonces,

$$p_2^{(1)} > 0, \text{para } 0 \leq r \leq R.$$

$$w^{(1)} > 0, \text{para } 0 \leq r < R,$$

$$w^{(1)} = 0, \text{para } r = R.$$

Diferenciando $p_2^{(1)}$ en ec. (3.7) (usando p para simplificar la notación) con respecto a r tenemos

$$\begin{aligned} dp/dr &= \left([\ell_1(1-(1+r)a_{22})+(1+r)\ell_2 a_{21}]\,(\ell_1 a_{12}-\ell_2 a_{11}) \right. \\ &\quad \left. -\,[\ell_2(1-(1+r)a_{11})+(1+r)\ell_1 a_{12}]\,(\ell_1 a_{12}-\ell_2 a_{11}) \right) / (g(r))^2 \\ &= \left(\ell_1(\ell_1 a_{12}+\ell_2 a_{22}) - \ell_2(\ell_1 a_{11}+\ell_2 a_{21})\right) / (g(r))^2. \end{aligned}$$

Entonces, $dp/dr \lesseqgtr 0$ si $(\ell_1 a_{12}+\ell_2 a_{22})/\ell_2 \lesseqgtr (\ell_1 a_{11}+\ell_2 a_{21})/\ell_1$. Notar que depende de las condiciones técnicas solamente.

Supongamos $dp/dr = 0$ y $\lambda = (\ell_1 a_{12}+\ell_2 a_{22})/\ell_2 = (\ell_1 a_{11}+\ell_2 a_{21})/\ell_1$. Entonces,

$$\ell_1 a_{11} + \ell_2 a_{21} = \lambda \ell_1,$$

$$\ell_1 a_{12} + \ell_2 a_{22} = \lambda \ell_2,$$

tal que,

$$\ell_2\left((\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{12}a_{21}\right) = 0.$$

Dado que $\ell_2 \neq 0$, tenemos $(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{12}a_{21} = 0$. Al igual que antes la solución coincide con

$$\lambda_1 = 1/(1+R).$$

Definamos $\gamma_1^\ell = (\ell_1 a_{11} + \ell_2 a_{21})/\ell_1$ y $\gamma_2^\ell = (\ell_1 a_{12} + \ell_2 a_{22})/\ell_2$. Entonces, aumenta (disminuye) p_2/p_1 si $\gamma_2^\ell > (<) \gamma_1^\ell$. Podemos llamar a γ^ℓ la composición relativa de bienes intermedios y trabajo de cada industria. Así si $\gamma_2^\ell > \gamma_1^\ell$ la industria 2 tiene más bienes intermedios como proporción del trabajo directamente incorporado. Haciendo abuso de la terminología podemos llamar capital a la primera parte.

Diferenciando totalmente las ecs. (3.6)-(3.7) de precios con respecto a r tenemos:

$$(a_{11} + pa_{21}) + (1+r)a_{21}\ dp/dr + dw/dr\ell_1 = 0,$$

$$(a_{12} + pa_{22}) + (1+r)a_{22}\ dp/dr + dw/dr\ell_2 = dp/dr.$$

Entonces podemos resolver:

$$dw/dr = \left(-(a_{11} + pa_{21}) - (1+r)a_{21} dp/dr\right)/\ell_1,$$

$$dw/dr = \left((1-(1+r)a_{22})dp/dr - (a_{12} + pa_{22})\right)/\ell_2.$$

Notar que si $dp/dr > 0$, entonces $dw/dr < 0$ de la primera ec.; si $dp/dr < 0$, entonces $dw/dr < 0$ de la segunda ec.; si $dp/dr = 0$, entonces $dw/dr < 0$ de las dos ecs.

Para obtener la curvatura, tomamos una segunda derivada:

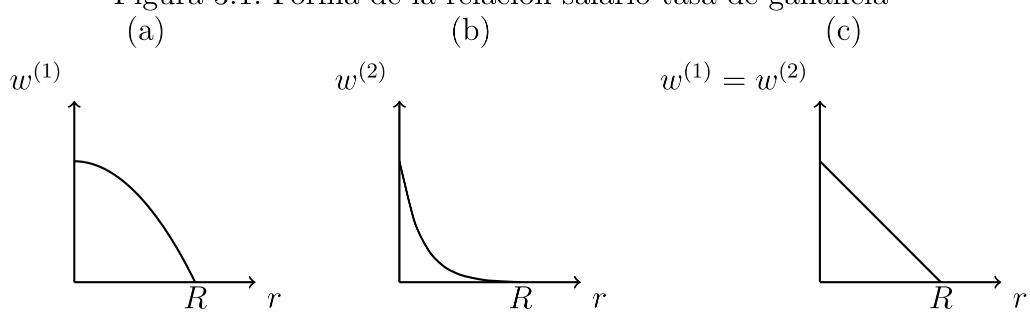
$$2a_{21}\ dp/r + (1+r)a_{21}\ d^2p/dr^2 + d^2w/dr^2\ell_1 = 0,$$

$$2a_{22}\ d^2p/dr^2 + (1+r)a_{22}\ d^2p/dr^2 + d^2w/dr^2\ell_2 = d^2p/dr^2,$$

entonces,

$$dp/dr = -d^2w/dr^2\left(\ell_1(1-(1+r)a_{22}) + (1+r)\ell_2 a_{21}\right)/2a_{21} = -d^2w/dr^2 \cdot g(r)/2a_{21},$$

Figura 3.1: Forma de la relación salario-tasa de ganancia



tal que

$$\text{sign } d^2w/dr^2 = (-1)\text{sign } dp/dr.$$

La Figura 3.1 muestra distintos casos para la forma de la curva (w, r). Supongamos que $dp_2^{(1)}/dr > 0$, entonces $d^2w^{(1)}/dr^2 < 0$ y $d^2w^{(2)}/dr^2 > 0$ (como en los casos (a) y (b)). Esto corresponde a un caso en el que la industria 2 usa más bienes intermedios como proporción del trabajo, en comparación a la industria 1. Supongamos que $dp_2^{(1)}/dr = 0$, entonces $d^2w^{(1)}/dr^2 = 0$ y $d^2w^{(1)}/dr^2 = 0$ (como en el caso (c)).

Ejemplo con un bien básico (maquinaria) y otro no básico (de consumo)

Para ilustrar esta relación consideremos el caso en el que la industria 1 corresponde a bienes de consumo no básicos, mientras que el bien de la industria 2 es básico (ej. maquinaria).

$$w^{(1)} = \frac{(1-(1+r)a_{22})}{\ell_1(1-(1+r)a_{22}) + (1+r)\ell_2 a_{21}} = \frac{(1-(1+r)a_{22})}{g(r)}. \tag{3.8}$$

Tomemos ahora la siguiente derivada:

$$dw^{(1)}/dr = \frac{-a_{22}g(r) - (1-(1+r)a_{22})g'(r)}{g^2(r)}, \tag{3.9}$$

donde

$$g'(r) = -\ell_1 a_{22} + \ell_2 a_{21},$$

entonces

$$dw^{(1)}/dr = \frac{-a_{22}[\ell_1(1-(1+r)a_{22}) + (1+r)\ell_2 a_{21}] - (1-(1+r)a_{22})(-\ell_1 a_{22} + \ell_2 a_{21})}{g^2(r)},$$

$$= \frac{-a_{22}[(1+r)\ell_2 a_{21}] - (1-(1+r)a_{22})(\ell_2 a_{21})}{g^2(r)} = \frac{-\ell_2 a_{21}}{g^2(r)} < 0.$$

Ahora tomando una segunda derivada,

$$d^2w^{(1)}/dr^2 = 2\frac{\ell_2 a_{21} g'(r)}{g^3(r)}.$$

El tipo de curvatura depende entonces de $g'(r)$. Si $g'(r) > 0$ (forma convexa de $(w^{(1)}, r)$) entonces $\ell_2/\ell_1 > a_{22}/a_{21}$, es decir, la industria 2 es relativamente más intensiva en trabajo directo que en bienes intermedios que la 1. Si $g'(r) < 0$ (forma cóncava de $(w^{(1)} - r)$) entonces $\ell_2/\ell_1 < a_{22}/a_{21}$, es decir, la industria 2 es relativamente menos intensiva en trabajo directo que en bienes intermedios que la 1. Finalmente, en el caso en que $\ell_2/\ell_1 = a_{22}/a_{21}$ la curva salario-ganancia es una linea recta. En este caso cada industria usa relativamente la misma proporción de trabajo directo vs. maquinaria. Éste punto es central para cuando discutamos la mercancía estándar en Sraffa.

Haciendo la derivada con respecto al precio:

$$dp_2^{(1)}/dr = \frac{-\ell_2 g'(r)}{g^2(r)}.$$

Supongamos ahora que tenemos un vector de cantidades producidas, $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]'$ que satisface el modelo de reproducción simple, donde todo lo que se produce de x_1 se consume y todo lo que se produce de x_2 se usa como bien intermedio o capital. (Tenemos entonces $\boldsymbol{c} = [x_1, 0]'$.) Supongamos también que el trabajo total disponible en la economía es 1 unidad. Entonces el producto neto per cápita es

$$x_1 + p_2^{(1)} x_2 = w^{(1)} + (1+r)p_2^{(1)}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) = w + (1+r)p_2^{(1)} x_2,$$

usando el supuesto que todos los bienes intermedios se usan tal que $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = x_2$. Entonces, todo el producto es consumido ya sea por los trabajadores o los dueños de los medios de producción:

$$x_1 = w^{(1)} + rp_2^{(1)} x_2.$$

Podemos definir a $k^{(1)} = p_2^{(1)} x_2$, como el capital per cápita expresado en precios del bien de consumo, y x_2 como el capital expresado en unidades de maquinaria. Lo que nos interesa es el primero, ya que el capital aparece siempre como fondos invertidos, aún en este caso en el que sólo hay un bien intermedio. Éste modelo corresponde al usado en el Cap. 5 para estudiar los efectos de Wicksell.

Postulemos ahora un efecto distributivo a partir de un cambio en r, pero que no afecta el producto total, $\boldsymbol{x}$.

$$0 = dw^{(1)}/dr + k^{(1)} + r\ dk^{(1)}/dr = dw^{(1)}/dr + k^{(1)} + r\ dp_2^{(1)}/dr\ k^{(1)}/p_2^{(1)}.$$

De esta manera podemos expresar el capital monetario como

$$k^{(1)} = -\frac{p_2^{(1)} \left(dw^{(1)}/dr\right)}{p_2^{(1)} + r\ dp_2^{(1)}/dr}$$

$$= -\frac{\ell_2/g(r)\left(-\ell_2 a_{21}/g^2(r)\right)}{\ell_2/g(r) - r\ \ell_2 g'(r)/g^2(r)} = \frac{a_{21}}{g^2(r) - rg'(r)g(r)} = \frac{a_{21}}{g(r)\left(g(r) - rg'(r)\right)}.$$

Ahora, $g(r) - rg'(r) = \ell_1(1 - (1+r)a_{22}) + (1+r)\ell_2 a_{21} + r\ell_1 a_{22} - r\ell_2 a_{21} = \ell_1(1 - a_{22}) + \ell_2 a_{21} = g(0) > 0$. Reemplazando tenemos

$$k^{(1)} = \frac{a_{21}}{g(0)g(r)}.$$

Finalmente,

$$dk^{(1)}/dr = \frac{-a_{21}g'(r)}{g(0)g^2(r)},$$

con lo que tenemos una relación directa entre la forma de la curva salario-tasa de ganancia y cómo ésta afecta al capital al cambiar r . Una forma convexa implica que el capital disminuye con r, una forma cóncava implica que el capital aumenta con r. Finalmente, en el caso que $g'(r) = 0$ el capital invertido no cambia con r, que coincide con la forma lineal de la curva (w, r).

3.4. Representación gráfica

Otra forma de ver el modelo es la siguiente.[4] Supongamos que dividimos ambos lados de las ecuaciones de precios por ℓ_i, $i = 1, 2$.

$$(p_1 a_{11}/\ell_1 + p_2 a_{21}/\ell_1)(1+r) + w = p_1/\ell_1,$$

$$(p_1 a_{12}/\ell_2 + p_2 a_{22}/\ell_2)(1+r) + w = p_2/\ell_2.$$

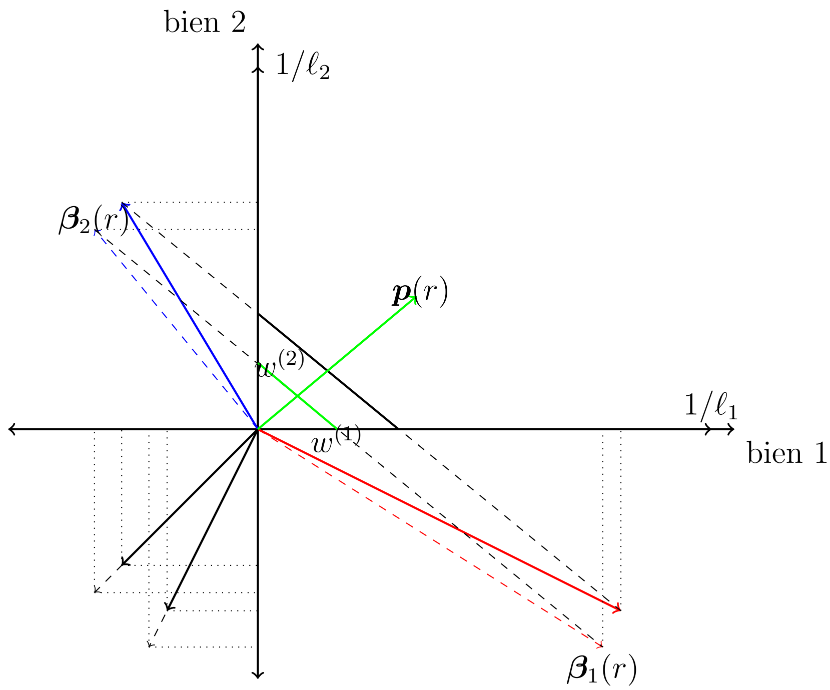
Definamos $\boldsymbol{p}(r) = [p_1(r)\ p_2(r)]$, $\boldsymbol{\beta}_1(r) = [1-(1+r)a_{11}/\ell_1, -(1+r)a_{21}/\ell_2]'$, $\boldsymbol{\beta}_2(r) = [-(1+r)a_{12}/\ell_1, 1-(1+r)a_{22}/\ell_2]'$. Entonces,

$$\boldsymbol{p}(r)\boldsymbol{\beta}_1(r) = \boldsymbol{p}(r)\boldsymbol{\beta}_2(r).$$

Esto significa que $\boldsymbol{p}(r)$ es ortogonal al vector que une $\boldsymbol{\beta}_1(r)$ con $\boldsymbol{\beta}_2(r)$, que lo llamamos $\boldsymbol{\beta}_1(r) \longleftrightarrow \boldsymbol{\beta}_2(r)$. Si todo el trabajo se usara en el bien i $(i = 1, 2)$,

[4]Para esta Sección seguimos la modelización de Mainwaring (1984).

Figura 3.2: Modelo con salarios nominales

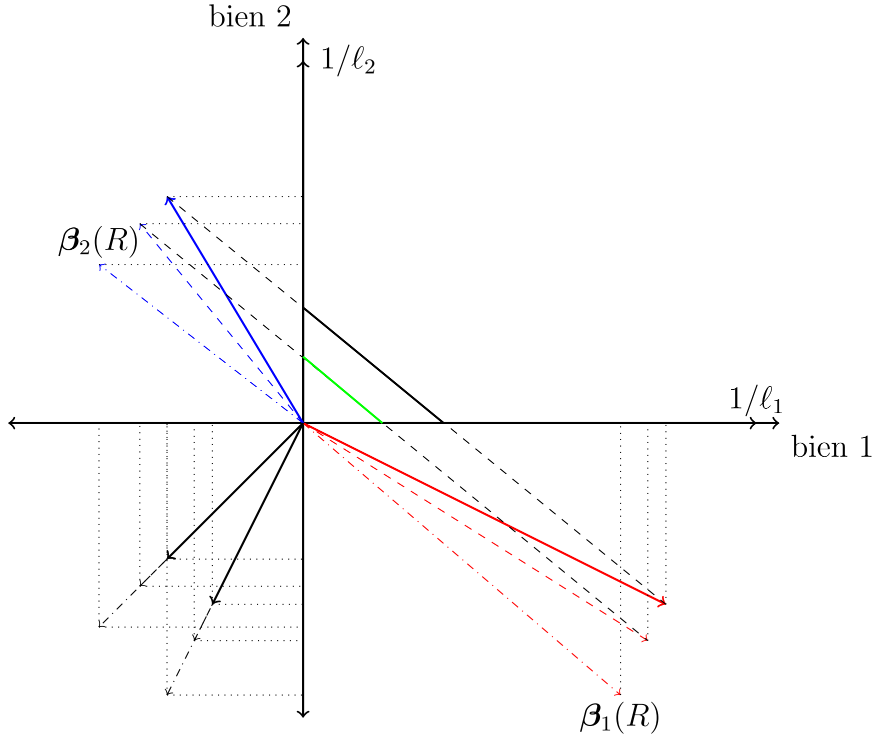


la intersección de $\boldsymbol{\beta}_1(r)\boldsymbol{\beta}_2(r)$ con el eje del bien 1 sería el vector de mercancías del salario, lo que se define como $w^{(i)}(r)$. Esta representación aparece en la Figura 3.2.

Vamos a ver que el vector que se forma por todos los puntos que unen a $\boldsymbol{\beta}_1(r) \longleftrightarrow \boldsymbol{\beta}_2(r)$ tiene pendiente que en general no es igual a $\boldsymbol{\beta}_1(0)\boldsymbol{\beta}_2(0)$. Un resultado interesante es que $\boldsymbol{p}(0)$ lo podemos definir como el vector de valores, $\boldsymbol{v}$. En general, los precios relativos cambian cuando cambia r, donde el bien que usa más capital (relativo) se ve más afectado por el cambio en r.

Cuando $r = R$, entonces $\boldsymbol{\beta}_1(R) \longleftrightarrow \boldsymbol{\beta}_2(R)$ pasa por el origen $[0, 0]$, y por ende el salario es 0 medido en las dos mercancías. Esto se observa en la Figura 3.3.

Figura 3.3: Modelo con salarios nominales, ganancia máxima



3.5. Modelo con trabajo heterogéneo o dos factores primarios

Supongamos ahora un modelo donde hay dos tipos de factores primarios. Podemos pensar que esto corresponde a dos tipos de trabajadores (ej. calificados y no calificados) o a trabajo y tierra. Este análisis permite evaluar distintos requerimientos relativos de los dos factores. El primer factor lo denotamos ℓ y al segundo χ.[5] El modelo en cantidades que satisface la reproducción simple es

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 \oplus a_{21}x_1 \oplus \ell_1 x_1 \oplus \chi_1 x_1 \quad &\Rightarrow \quad x_1, \\ a_{12}x_2 \oplus a_{22}x_2 \oplus \ell_2 x_2 \oplus \chi_2 x_2 \quad &\Rightarrow \quad x_2. \end{aligned}$$

Se usa w como la remuneración por unidad del primer factor y s como la remuneración por unidad del segundo. Notar que en este contexto tenemos tres variables distributivas, (w, s, r) en base a las remuneraciones de los capitalistas y los dos factores.

El modelo anterior con precios (p_1, p_2, w, s, r) es,

$$(p_1 a_{11} + p_2 a_{21})(1 + r) + w\ell_1 + s\chi_1 = p_1,$$

$$(p_1 a_{12} + p_2 a_{22})(1 + r) + w\ell_2 + s\chi_2 = p_2.$$

Usemos ahora p_1 como numerario

$$(a_{11} + p_2 a_{21})(1 + r) + w\ell_1 + s\chi_1 = 1,$$

$$(a_{12} + p_2 a_{22})(1 + r) + w\ell_2 + s\chi_2 = p_2.$$

Podemos entonces despejar, p_2 como función de r y el precio relativo s/w,

[5] Seguimos a Metcalfe y Steedman (1979) para los principales resultados.

$$p_2 = \frac{a_{12}(1+r)(a_1+\chi_1 s/w)+(1-a_{11}(1+r))(a_2+\chi_2 s/w)}{(1-a_{22}(1+r))(a_1+\chi_1 s/w)+a_{21}(1+r)(a_2+\chi_2 s/w)}. \tag{3.10}$$

Siguiendo a Metcalfe y Steedman (1979, p.18) podemos evaluar el efecto de un cambio de la remuneración relativa de s/w en los precios,

$$D^2\frac{\partial p_2}{\partial s/w} = det(\boldsymbol{I}-(1+r)\boldsymbol{A})\ell_1\ell_2\left[\frac{\chi_2}{\ell_2}-\frac{\chi_1}{\ell_1}\right], \tag{3.11}$$

donde $D=(1-a_{22}(1+r))(a_1+\chi_1 s/w)+a_{21}(1+r)(a_2+\chi_2 s/w)$ es el denominador de la expresión anterior. Así aparece claramente que cambios en las remineraciones relativas tendrán un efecto positivo o negativo dependiendo de si el bien 2 es más o menos intensivo en el factor 2 que en el 1.

Un análisis muy simple se puede realizar para obtener la relación (w,s) para una tasa de ganancia r dada. En este caso, [6]

$$w^{(1)} = \left[\frac{det(\boldsymbol{I}-(1+r)\boldsymbol{A})}{\ell_1(1-(1+r)a_{22})+(1+r)\ell_2 a_{21}}\right]-\left[\frac{\chi_1(1-(1+r)a_{22})+(1+r)\chi_2 a_{21}}{\ell_1(1-(1+r)a_{22})+(1+r)\ell_2 a_{21}}\right]s^{(1)}. \tag{3.12}$$

Es claro que hay una relación lineal negativa entre ambas remuneraciones. Notar que cuando $r=R$, entonces $det(\boldsymbol{I}-(1+r)\boldsymbol{A})$ con lo que ambos

[6] Del precio del bien 2 podemos despejar:

$$p_2 = [a_{12}+w\ell_2+s\chi_2]/(1-(1+r)a_{22}).$$

Luego reemplazando en la ecuación del bien 1,

$$(1+r)a_{11}+(1+r)[a_{12}+w\ell_2+s\chi_2]/(1-(1+r)a_{22})a_{21}+w\ell_1+s\chi_1=1,$$

$$((1+r)a_{11}(1-(1+r)a_{22})+[a_{12}(1+r)+w\ell_2+s\chi_2])a_{21}+(1-(1+r)a_{22})w\ell_1+(1-(1+r)a_{22})s\chi_1=(1-(1+r)a_{22}).$$

Pasamos a un lado de la igualdad lo que contenga w,

$$w(\ell_2 a_{21}+\ell_1(1-(1+r)a_{22}))=(1-(1+r)a_{22})(1-(1+r)a_{11})-(1+r)a_{12}a_{21}-(\chi_2 a_{21}+\chi_1(1-(1+r)a_{22})).$$

$w^{(1)}$ y $s^{(1)}$ son cero. Resulta interesante notar que a medida que aumenta la tasa de ganancia entonces se acotan las posibilidades de variación de las dos remuneraciones. También cambia la pendiente, que depende del signo de la derivada de la pendiente con respecto a r, que a su vez depende de

$$(-\chi_1 a_{22}+\chi_2 a_{21})(\ell_1(1-(1+r)a_{22})+(1+r)\ell_2 a_{21})-(-\ell_1 a_{22}+\ell_2 a_{21})(\chi_1(1-(1+r)a_{22})+(1+r)\chi_2 a_{21})$$

$$= -(1+r)\ell_2\chi_1 a_{22}a_{21} + \chi_2\ell_1 a_{21}(1-(1+r)a_{22})$$

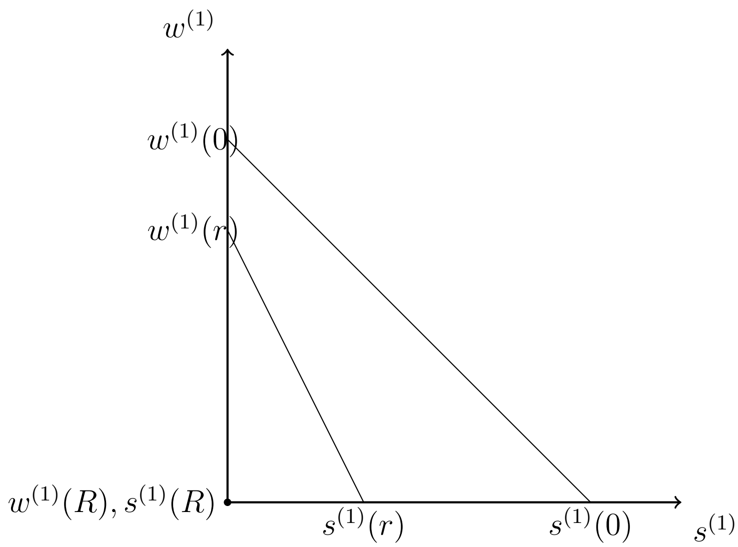
$$+(1+r)\ell_1\chi_2 a_{22}a_{21} - \ell_2\chi_1 a_{21}(1-(1+r)a_{22})$$

$$= a_{21}(\chi_2\ell_1 - \ell_2\chi_1),$$

es decir, depende de $sign\left(\frac{\chi_2}{\ell_2} - \frac{\chi_1}{\ell_1}\right)$, los requerimientos relativos de los dos factores. Si el bien 2 (bien 1) usa relativamente más del factor 2 que el bien 1 (bien 2), entonces la pendiente de la ec. (3.12) aumenta (disminuye) en valor absoluto cuando aumenta r. Éste modelo es ilustrado en la Figura 3.4. Notar que para este modelo de dos bienes esta relación no depende de r, y por lo tanto es la misma para todo nivel de tasa de ganancia. De todas maneras, la relación sí se ve afectada en cuanto al numerario usado.

Si dejásemos uno de los factores con remuneración 0 (ej. $s = 0$), obtendríamos una frontera de los otros dos (ej. (w, r)), que puede estudiarse de la misma manera que el desarrollo en este capítulo. Podríamos así tener que un factor tiene una relación cóncava o convexa con respecto a r, mientras que el otro puede tener cualquier de las dos, cóncava o convexa. En este caso podemos hacer una frontera de remuneraciones de las tres variables distributivas (r, w, s), como por ejemplo en la Figura 3.5. En este ejemplo tenemos una relación cóncava en (w, r) y convexa en (s, r), junto con la relación lineal (w, s) tal como fuera descripta en (3.12).

Figura 3.4: Modelo con dos factores primarios



3.6. Ejercicios

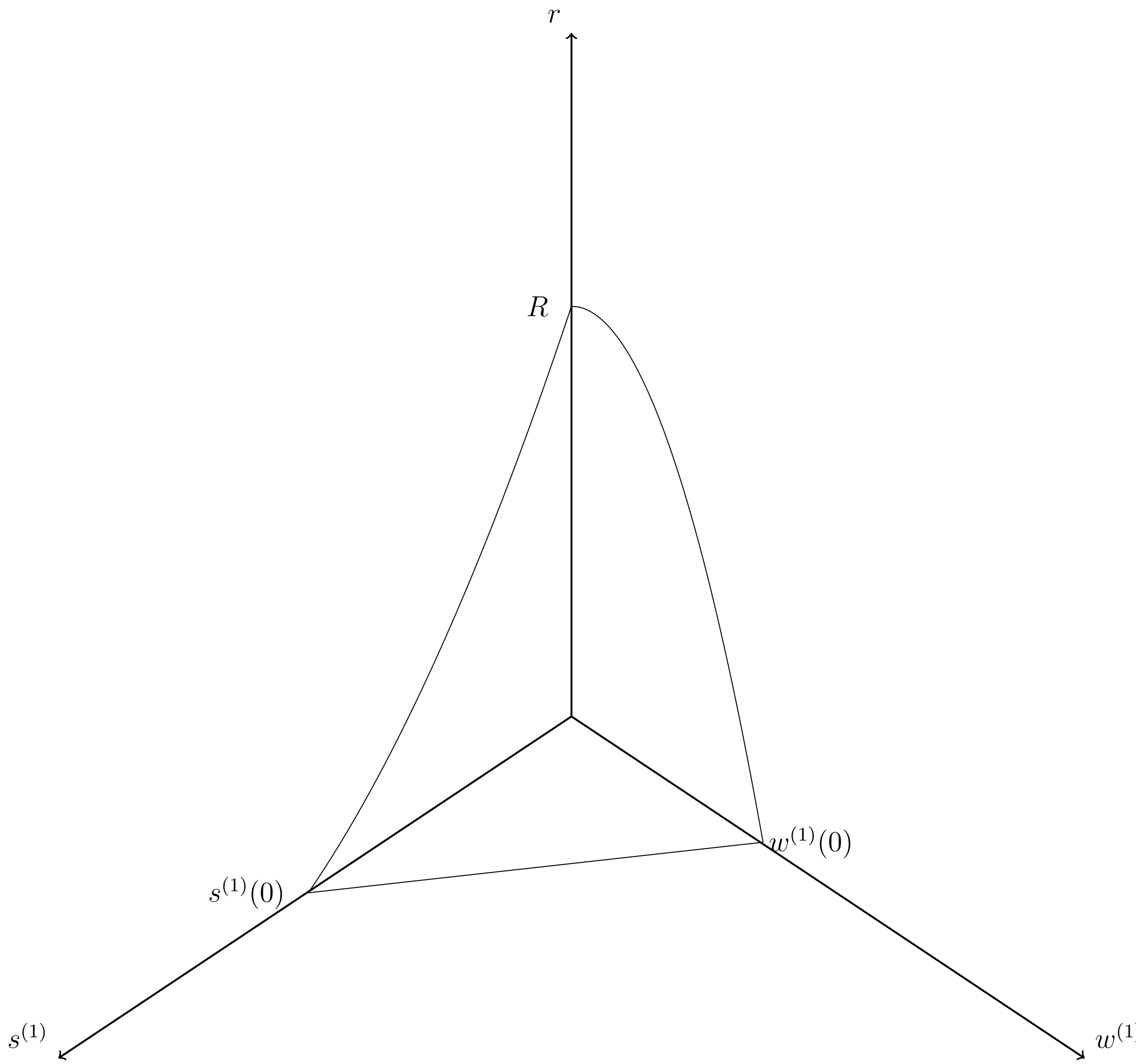
Ejercicio 3.6.1. *Usar el modelo de (Sraffa, 1960, p.7) donde agregamos arbitrariamiente horas requeridas de trabajo:*

$$280 \text{ } ton. \text{ } trigo \oplus 12 \text{ } ton. \text{ } hierro \oplus 10 \text{ } hs.trabajo \Rightarrow 575 \text{ } ton. \text{ } trigo,$$

$$120 \text{ } ton. \text{ } trigo \oplus 8 \text{ } ton. \text{ } hierro \oplus 5 \text{ } hs.trabajo \Rightarrow 20 \text{ } ton. \text{ } hierro.$$

Encontrar las curvas de salarios-tasa de ganancia usando el bien 1 y el bien 2 como numerario.

Figura 3.5: Modelo con dos factores primarios, frontera (r, w, s)



Capítulo 4

Teoría sraffiana (iii)

4.1. Introducción

El modelo sraffiano puede en realidad corresponder a una economía de más de 2 sectores, representando así una economía más compleja. La llamada matriz insumo-producto de Leontief juega un rol central en el análisis de cuentas nacionales, determinando las interrelaciones entre sectores e industrias. El modelo sraffiano (de producción simple) busca así determinar todos los precios bajo una misma tasa de ganancia y salario nominal para una cantidad n de sectores o industrias, donde cada uno produce una mercancía diferente.

Los precios de producción son los precios de mercancías que se obtienen en una economía de reproducción simple con un tasa de ganancia uniforme. En una economía con n sectores la idea es determinar $n-1$ precios relativos conjuntamente con r y w factibles, es decir no negativos. Para un análisis general esto requiere el uso de álgebra matricial.

Este capítulo hace un análisis integral del modelo sraffiano y propone una caracterización basada de distintos casos en base a la tasa de ganancia. Así surge el análisis para la máxima tasa de ganancia y para ganancia nula, que da lugar a la teoría del valor trabajo. El análisis de muchos sectores permite una mayor profundización de la caracterización entre sectores básicos y no básicos, y un análisis de una medida invariante (a variables distriutivas) de valor propuesta por Sraffa, la llamada mercancía estándar.

4.2. Modelo para n mercancías

Consideremos una economía de **reproducción simple** y solo **capital circulante** (se consume en el periodo) con n sectores, cada sector produce un bien. Sea $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ la matriz $n \times n$ de coeficientes inter-industriales, con elemenos a_{ij} que especifica la cantidad de unidades de bienes del sector i que se necesitan para producir una unidad del bien j. Llamamos esta matriz como matriz insumo-producto de Leontief:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Definamos $\boldsymbol{x} = [x_1, \dots, x_n]'$ como el vector $n \times 1$ de mercancías producidas y $\boldsymbol{c} = [c_1, \dots, c_n]'$ el vector de bienes de consumo finales. Éste último corresponde al llamado excedente fijo de la economía. Entonces,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + c_i = x_i,$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{x}.$$

La idea es que a partir de $\boldsymbol{c}$ se determina la cantidad que cada sector debe producir $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{c}$, asumiendo que $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ es no singular. Si $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}_n$ tenemos el modelo de subsistencia, si $\boldsymbol{c} \geq \boldsymbol{0}_n$ tenemos el modelo con excedente.

El uso de matrices de Leontief y coeficientes fijos contrasta con las especificaciones neoclásicas, donde se asume la posibilidad de sustituir insumos. Como veremos más adelante, en realidad, asumir técnicas en base a esta matriz es solo una aproximación a un modelo más complejo donde puede haber muchas técnicas en simultáneo. Lavoie (2009) comenta que la mayoría de los modelos post-keynesianos asume este tipo de descripción de la tecnología. Dado que se asume que las firmas operan con cierta capacidad ociosa, que se define como capacidad *práctica*, medida por ingenieros de producción (Eichner, 1976). Los costos unitarios son así constantes y entran a ser crecientes cuando se llega a la capacidad total. Sraffa (1960) enfatiza que su modelo principal no requiere del supuesto de rendimientos constantes a escala, y que por el contrario, se podría generalizar este análisis asumiendo que la técnica cambia con la escala.

Podemos plantear dos preguntas centrales.

(i) (existencia) Para un $\boldsymbol{c} \geqq 0$ dado, ¿podemos garantizar que existe $\boldsymbol{x} \geqq 0$ tal que $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$? ¿Es $\boldsymbol{x}$ único?

(ii) (no singularidad) ¿La matriz $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$ es no singular (invertible)? ¿Podemos garantizar que $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1} \geq 0$?

Se puede demostrar que (i) si y solo si (ii). De hecho esto se prueba con la **condición de Hawkins-Simon** (HS) que establece que $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ tiene todos sus menores principales positivos $1-a_{11}>0, \begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1-a_{22} \end{vmatrix} > 0....$ Si esta condición de satisface decimos que la matriz $\boldsymbol{A}$ es **productiva**.[1]

Notar que si comparamos con el caso de 2 mercancías, la condición HS se cumple en los capítulos anteriores. Supongamos un modelo de 2 productos, $n=2$. Entonces la condición implica que $1-a_{11}>0, \begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1-a_{22} \end{vmatrix} =$ $(1-a_{11})(1-a_{22})-a_{12}a_{21}>0$. Esto implica que $1-a_{11}>0, 1-a_{22}>0$,

[1] Ver Takayama (1985, cap.4).

que cada industria tiene producto neto positivo. Supongamos que $a_{22} = 0$. Entonces la condición es $1 > a_{11} + a_{12}a_{21}$. De nuevo el producto neto de la industria 1 tiene que ser mayor a lo que se usa en ella misma y en la otra. a_{11} es la cantidad del bien 1 para producir una unidad del bien 1, y $a_{12}a_{21}$ es la cantidad del bien 1, usada para producir bien 2 que se usa para producir bien 1. Las industrias deben ser auto-sustentables. Otra interpretación. Para producir $\boldsymbol{c}$, necesitamos $\boldsymbol{Ac}$, pero para producir esto, $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{c}$. Entonces $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{Ac}+\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{c}+\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{c}+....$ Para que converja a $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{c}$ se tienen que cumplir las condiciones de HS.

Otra definición importante es aquella de viabilidad. Una economía es **viable** si existe $\boldsymbol{x} \geqq 0$ tal que $\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{Ax}$. Una economía para la cual $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$ es una economía de **subsistencia** (también definido como apenas viable) mientras que una economía que $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) \geq \boldsymbol{0}$ tiene un **excedente**. Para la economía de subsistencia la condición se satisface con $det(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) = 0$ (el último menor principal que corresponde al determinante es cero).

Definamos las sumas de cada fila y cada columna.

$$\psi_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ , i = 1, 2, ..., n$$

$$\zeta_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \ , j = 1, 2, ..., n$$

Definamos $\bar{\psi} = \max_i \ \psi_i, \bar{\zeta} = \max_j \ \zeta_j$. Las condiciones de Brauer-Solow ($\bar{p}si < 1$ y $\bar{\zeta} < 1$) garantizan la existencia y no singularidad que corresponden a la condición HS.

Supongamos un vector $1 \times n$, $\boldsymbol{\ell} = [\ell_1, \ldots, \ell_n]$ que contiene las unidades de trabajo que se necesitan para producir una unidad del bien i. $\ell_i \geq 0$ es la cantidad de trabajo para producir una unidad del bien i.

$\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{\ell}$ resumen las condiciones técnicas de producción. $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\ell}]'$ se define como una **técnica** del sistema. Para cada técnica podemos resolver por los precios relativos en base a w y r. En el siguiente capítulo, vamos a considerar un conjunto de técnicas, $[\boldsymbol{A}^{(j)}, \boldsymbol{\ell}^{(j)}]'$, $j = 1, ..., J$. Para este caso también vamos a analizar el proceso de selección de técnicas, que va a depender a su vez de los distintos valores de w y r.

Si asumimos que el trabajo viene dado por una canasta de subsistencia (salario de subsistencia), entonces $\boldsymbol{\ell}$ se contabiliza internamente como parte de las mercancías usadas para producir en $\boldsymbol{A}$. En este caso es como si el salario se pagara al inicio del proceso de producción en mercancías.

Si asumimos que el salario (w) se paga como parte del excedente, entonces entra en juego como una variable distributiva. En el modelo sraffiano los salarios se pagan luego de que se produzca, como parte del producto neto. En el modelo marxista donde se pagan previamente a la producción en base a una canasta de subsistencia (ver Cap. 6). Un modelo de equilibrio en una economía capitalista lo podemos representar como uno de **precios de producción**. Esto es un vector $1 \times n$ de precios $\boldsymbol{p} = [p_1, p_2, \ldots, p_n]$, r la tasa de ganancia, y w el salario por unidad de trabajo, tal que podemos plantear la ecuación fundamental de precios de producción:

$$\boldsymbol{p}\boldsymbol{A}(1 + r) + \boldsymbol{\ell}w = \boldsymbol{p}. \tag{4.1}$$

Notar que el sistema contiene n ecuaciones pero $n + 2$ incógnitas ($\boldsymbol{p}$, w, r). Si fijamos el precio de un bien a la unidad (*numérarie*), igual tenemos $n + 1 > n$ incógnitas. Los economistas clásicos, Ricardo y Marx, proponían usar $w = w_s$ como el salario de subsistencia y así se resuelve el sistema. El sistema sraffiano se preocupa por determinar (w, r) conjuntamente para evaluar la distribución del producto neto.

4.2.1. Precios de producción: ganancia máxima

Los casos estudiados en los Caps. 2 y 3 se pueden generalizar para n bienes. Definamos $R = r_{(w=0)}$, la tasa de ganancia con salarios cero. Entonces tenemos $\boldsymbol{p}^R\boldsymbol{A}(1 + R) = \boldsymbol{p}^R$ o $\boldsymbol{p}^R(\boldsymbol{I} - (1 + R)\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$.

Usemos $\lambda_m = \frac{1}{1+R}$, tal que $\boldsymbol{p}^R(\lambda_m \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$. Por el Teorema de Perron-Frobenius (ver Apéndice), definamos λ_m como el máximo autovalor. Dado que

$$R = \frac{1}{\lambda_m} - 1$$

tenemos que $R \geq 0$ si y solo si $\lambda_m \leq 1$. La condición HS garantiza que $\lambda_m \leq 1$.

Esto daría lugar a una **teoría pura del capital**.

4.2.2. Valor trabajo

Supongamos el caso en el que $r = 0$. En este caso el producto neto va al trabajo,

$$\boldsymbol{p}^0(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\ell} w,$$

Como $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ es no singular, y usando $w = 1$, podemos obtener el vector de **coeficientes de trabajo verticalmente integrados**:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}. \tag{4.2}$$

En este caso $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}^0$ representa la cantidad de trabajo integrada directamente o indirectamente en cada mercancía. Notar que si la economía es productiva, entonces $\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} \gg \boldsymbol{0}$, por lo tanto todos los valores son positivos.

Esto daría lugar a una **teoría pura del valor trabajo** que juega un rol central en el análisis marxista. Los valores son proporcionales a la cantidad de trabajo (directo e indirecto) de cada mercancía.

4.2.3. Precios de producción: el caso general

En el caso general, $0 < r < R$, tenemos que

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{\ell}[\boldsymbol{I} - (1+r)\boldsymbol{A}]^{-1}w. \tag{4.3}$$

Si suponemos $w = 1$ como *numéraire*,

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{\ell}[\boldsymbol{I} - (1+r)\boldsymbol{A}]^{-1}. \tag{4.4}$$

Dado que $r > 0$, $\boldsymbol{\ell} \geq 0$ y que $[1/(1+r)] > \lambda_m$, entonces $[\frac{1}{(1+r)}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^{-1} \geq \boldsymbol{0}$, tenemos que $\boldsymbol{p} \geq \boldsymbol{0}$, precios no negativos. Los precios derivados con esta relación se llaman también "labour commanded" (Adam Smith, T.R.Malthus) o "unidades de salario" (J.M.Keynes).

Siguiendo a Kurz y Salvadori (1995, pp.97-98) podemos plantear un distema de ecuaciones general, para cualquier numerario dado por una mercancía $\boldsymbol{z}$,

$$\boldsymbol{p} = w\boldsymbol{\ell} + (1+r)\boldsymbol{p}\boldsymbol{A},$$

$$\boldsymbol{p}\boldsymbol{z} = 1.$$

Dado que $0 < r < R$, entonces $[\boldsymbol{I} - (1+r)\boldsymbol{A}]^{-1} > \boldsymbol{0}$, y tenemos que

$$\boldsymbol{p} = w\boldsymbol{\ell}[\boldsymbol{I} - (1+r)\boldsymbol{A}]^{-1},$$

y entonces

$$w\boldsymbol{\ell}[\boldsymbol{I} - (1+r)\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{z} = 1.$$

Así podemos despejar,

$$w = \frac{1}{\boldsymbol{\ell}[\boldsymbol{I} - (1+r)\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{z}}, \tag{4.5}$$

$$\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{\ell}[\boldsymbol{I} - (1+r)\boldsymbol{A}]^{-1}}{\boldsymbol{\ell}[\boldsymbol{I} - (1+r)\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{z}}. \tag{4.6}$$

Supongamos que $p_i = 1$ es el numerario tal que $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{e}_i = (0\ 0\ \ldots 1\ \ \ldots 0)'$ es un vector que tiene 1 en el componente i y 0 en el resto. Definamos el salario relativo expresado en la mercancía 1, $w^{(i)} = w/p_i$. Entonces

$$1 = \boldsymbol{\ell}[\boldsymbol{I} - (1+r)\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{e}_1 w^{(i)}. \tag{4.7}$$

Esto nos da una relación inversa, no necesariamente lineal, entre salario y tasa de ganancia. Éste mismo ejercicio lo podríamos repetir para cualquier mercancía, dando lugar al mismo resultado, siempre una relación inversa entre w y r.

Evaluamos ahora el efecto de un cambio en r, dado por

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial r}\boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{pA} + (1+r)\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial r}\boldsymbol{A}, \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial r}\boldsymbol{z} = 0. \tag{4.9}$$

Así podemos despejar y obtener

$$\frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{\boldsymbol{pA}[\boldsymbol{I} - (1+r)\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{\ell}[\boldsymbol{I} - (1+r)\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{\ell}[\boldsymbol{I} - (1+r)\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{A}[\boldsymbol{I} - (1+r)\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{z} < 0, \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial r} = \left(\frac{\boldsymbol{pA}[\boldsymbol{I} - (1+r)\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{z}\ell'}{\boldsymbol{\ell}[\boldsymbol{I} - (1+r)\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{z}}\right)[\boldsymbol{I} - (1+r)\boldsymbol{A}]^{-1}. \tag{4.11}$$

Este mismo análisis lo podemos aplicar al caso de $r = R$. Así tenemos la relación

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial r}[\boldsymbol{I} - (1+R)\boldsymbol{A}] = \boldsymbol{pA} + \frac{\partial w}{\partial r}\boldsymbol{\ell}. \tag{4.12}$$

Definamos a $\boldsymbol{x}^*$ como el autovector derecho de la matriz $\boldsymbol{A}$ asociado a $1/(1+R)$ normalizado para tener $\boldsymbol{\ell x}^* = 1$. Entonces la ecuación (4.12) tiene solución si

$$\frac{\partial w}{\partial r} = -\boldsymbol{pAx}^* < 0.$$

Las soluciones a la ecuación anterior tienen la forma[2]

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial r} = \boldsymbol{p}^* + \theta \boldsymbol{p},$$

dado que $\boldsymbol{p}[\boldsymbol{I} - (1+R)\boldsymbol{A}] = \boldsymbol{0}$. Por otra parte, usando la ecuación 4.9,

$$[\boldsymbol{p}^* + \theta \boldsymbol{p}]\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0},$$

entonces,

$$\theta = -\boldsymbol{p}^* \boldsymbol{z}.$$

Llegamos así a

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial r} = \boldsymbol{p}^* - \boldsymbol{p}^* \boldsymbol{z} \boldsymbol{p} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{p}^* \boldsymbol{z})\boldsymbol{p}^*.$$

4.3. Cambios en los precios

Los precios son una función de la relación (w, r) y de las condiciones técnicas $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\ell})$. En general, los precios relativos cambian cuando cambia (w, r).

Supongamos que $w = 1$. Se puede ver que todos los elementos en $[\boldsymbol{I} - (1+r)\boldsymbol{A}]^{-1}$ son una función no decreciente de r. Entonces, al aumentar la tasa de ganancia aumentan todos los precios o baja el salario real. Las mercancías que solo necesitan trabajo (es decir, sin bienes intermedios, supongamos la fila del bien j, $\boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{0}$) no cambian sus precios. En general, al aumentar r aumentan los precios relativos de las mercancías que usan (relativamente) más capital.

Cada ecuación de precios la podemos escribir como

$$p_j = (1+r)\sum_i p_i a_{ij} + w\ell_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

[2] Ver Kurz y Salvadori (1995, Teorema A.2.1 y su aplicación en p.99).

Reescribiendo la ecuación anterior llegamos a

$$w = \frac{p_j}{\ell_j} - (1+r)\frac{\sum_i p_i a_{ij}}{\ell_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

De esta forma podemos considerar una ecuación $w = \alpha_j - (1+r)\beta_j$ para cada $j = 1, 2, \ldots, n$. Cada ecuación se intercepta en el mismo punto (w, r), aunque no necesariamente son iguales los modelos lineales (intercepto y pendiente diferente).

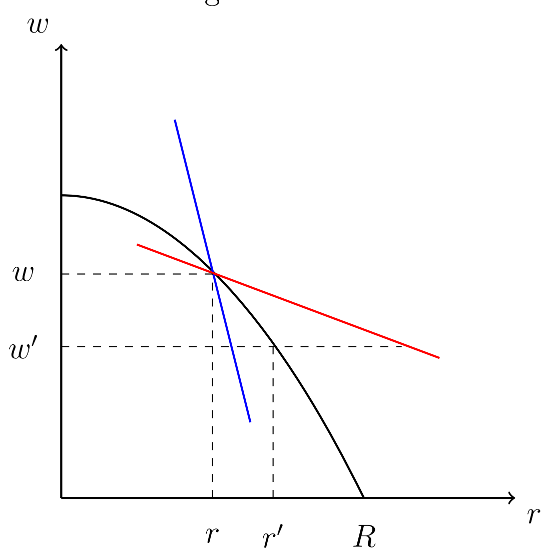
Ahora esta relación no necesariamente se va a mantener estable y lineal a medida que cambian (w, r) porque los precios pueden cambiar de distintas maneras. Un caso especial es el del mismo ratio capital:trabajo para todas las industrias, es decir, $\frac{\sum_i p_i a_{ij}}{\ell_j}$ para todo j. En esta caso la relación (w, r) es una función lineal.

Analicemos ahora un desplazamiento sobre la curva $(w, r) \to (w', r')$ con $w' < w$ y $r' > r$. Si los precios se mantuvieran igual, cada sector se desplaza sobre la curva $w = \alpha_j - (1+r)\beta_j$. Consideremos ahora un valor fijo de w'. Las industrias que tienen mayor ratio *capital* : *trabajo*, no van a alcanzar r' ('deficitarias', mayor pendiente en (w, r)) y las que tienen menor ratio *capital* : *trabajo* ('superavitarias', menor pendiente en (w, r)) van a lograr mayor r'. Entonces para compensar, las deficitarias tienen que aumentar sus precios y las superavitarias van a tener que reducir sus precios.

4.4. Industrias básicas vs. no básicas en el modelo sraffiano

Se define como mercancía **básica** a todas las que entren directa o indirectamente en el proceso de **producción** de **todas** las otras mercancías. El resto son las **no básicas**. Hasta ahora estamos considerando que el consumo de los trabajadores está contabilizado como parte de los insumos de producción. Más adelante habría que diferenciar entre bienes básicos puros

Figura 4.1: Industrias deficitarias y superavitarias



(aquellos que se usan como insumos) de aquellos que entran solo a través del salario-mercancía. Siempre y cuando se suponga que lo que consumen los trabajadores puede sustituir un bien por otro, los bienes básicos puros claramente anticipan restricciones a la producción.

Una mercancía i entra **directamente** en la producción de la mercancía j si $a_{ij} > 0$. Ahora, decimos que entra **indirectamente** en la producción de j si existen índices $h_1, h_2, ..., h_z$ tal que $a_{ih_1} a_{h_1 h_2} \ldots a_{h_{z-1} h_z} a_{h_z j} > 0$. En términos matriciales, podemos decir que i entra directamente en la producción de j si $\boldsymbol{e}_j' \boldsymbol{A} \boldsymbol{e}_i > 0$, donde $\boldsymbol{e}_\cdot$ es un vector $n \times 1$ de ceros con 1 en la posición $\cdot$. Entra en forma indirecta si $\boldsymbol{e}_j'(\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}^3 + \ldots + \boldsymbol{A}^n)\boldsymbol{e}_i > 0$. Entonces podemos definir que i es básica si $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}^3 + \ldots + \boldsymbol{A}^n)\boldsymbol{e}_i \gg \boldsymbol{0}$.

Podemos suponer el caso en que no todos los bienes entran directamente o indirectamente como medios de producción de otras industrias. Definamos las industrias **básicas** $1, 2, ..., k$ como los bienes que entran como insumos en otras industrias, y las **no básicas** $k+1, k+2, ..., n$ en las que no entran.

Supongamos que la matriz $\boldsymbol{A}$ es reducible.[3] Esto significa que usando un cambio de filas y columnas se puede re-escribir en forma triangular como

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix}.$$

Para este caso asumimos que $\boldsymbol{A}_{11}$ es una matriz irreducible $k \times k$, $\boldsymbol{A}_{12}$ es una matriz $k \times (n-k)$, $\boldsymbol{A}_{22}$ es una matriz $(n-k) \times (n-k)$ (reducible o irreducible). Asumimos que al menos un elemento de $\boldsymbol{A}_{12}$ no es cero, sino serían sistemas independientes. Además,

$$[\boldsymbol{I}-(1+r)\boldsymbol{A}]^{-1} = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{I}-(1+r)\boldsymbol{A}_{11}]^{-1} & [\boldsymbol{I}-(1+r)\boldsymbol{A}_{11}]^{-1}\boldsymbol{A}_{12}[\boldsymbol{I}-(1+r)\boldsymbol{A}_{22}]^{-1} \\ \boldsymbol{0} & [\boldsymbol{I}-(1+r)\boldsymbol{A}_{22}]^{-1} \end{bmatrix}$$

Entonces, la ecuación de precios la podemos escribir como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_1 &= \boldsymbol{\ell}_1[\boldsymbol{I}-(1+r)\boldsymbol{A}_{11}]^{-1}w \\ \boldsymbol{p}_2 &= \boldsymbol{\ell}_1[\boldsymbol{I}-(1+r)\boldsymbol{A}_{11}]^{-1}\boldsymbol{A}_{12}[\boldsymbol{I}-(1+r)\boldsymbol{A}_{22}]^{-1}w + \boldsymbol{\ell}_2[\boldsymbol{I}-(1+r)\boldsymbol{A}_{22}]^{-1}w \end{aligned}$$

Así, dado el salario, la tasa de ganancia se determina solamente en la primera ecuación y de $\boldsymbol{A}_{11}$. De hecho si se expresa el salario en términos de una mercancía básica, la relación (w, r) depende exclusivamente de las mecancías básicas.

Como muestra (Kurz y Salvadori, 1995, cap.4), los bienes básicos son indispensables, es decir, para que $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ necesitamos $\boldsymbol{x}_1 > \boldsymbol{0}$ y viables, es decir, $\boldsymbol{x}_1 > \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{x}_1$. De hecho, los bienes no básicos solo pueden ser producidos si se producen bienes básicos.

[3] Ver el Apéndice.

4.5. Reducción a trabajo fechado

Kurz y Salvadori (1995, cap. 6) comentan que hay varias maneras de describir las técnicas de producción. En una de ellas, el enfoque austríaco (en línea con los trabajos de Menger, von Wieser, Böhm-Bawerk y los estudios de Wicksell y Hicks) entiende que los precios de los productos son el resultados de factores de producción originales, en particular, trabajo y tierra. En esta sección, nos centramos en el trabajo, que va a dar lugar a distintas corrientes de trabajo que ocurrieron en el pasado, definido como **trabajo fechado**.

Tomemos el vector de precios en la ec. (4.3), $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{\ell}[\boldsymbol{I} - (1+r)\boldsymbol{A}]^{-1}w$. La matriz $[\boldsymbol{I} - (1+r)\boldsymbol{A}]^{-1}$ se puede expandir como una serie en $\boldsymbol{A}$ si $(1+r) < 1/\lambda_m$, donde λ_m es el autovalor de mayor valor en valor absoluto de $\boldsymbol{A}$ (Pasinetti, 1977, p.265), o lo que es lo miso $r < R$. En ese caso,

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{\ell}w + \boldsymbol{\ell}w(1+r)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\ell}w(1+r)^2\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{\ell}w(1+r)^3\boldsymbol{A}^3... \tag{4.13}$$

Este cálculo muestra que el vector de precios es la suma de una serie de poderes $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^2$, $\boldsymbol{A}^3$,... donde las columnas de cada matriz son los requerimientos de insumos en cada ronda. Las condiciones sobre la matriz de Leontief garantizan que $\lim_{j\to\infty} \boldsymbol{A}^j = \boldsymbol{0}$. La premultiplicación por $\boldsymbol{\ell}w$ determina que estos son en realidad una serie infinita de vectores. Podemos así redefinir $\boldsymbol{\ell}w$ como los requerimientos directos de trabajo, y al resto los requerimientos indirectos. Sobre cada trabajo fechado se le agrega una ganancia compuesta dada por poderes de $(1+r)$.

Notar que cada trabajo fechado en el periodo t se puede pensar como un polinomio en la ganancia compuesta $(1+r)^t$ multiplicado por el factor $\ell w\boldsymbol{A}^t$. Éstos tienen una forma no lineal en $r \in [0, R]$ que da lugar a que no haya una relación monotónica entre la contribución de cada periodo t y su contribución al precio total en (4.13). Sraffa (1960, cap. 6) enfatiza que esto da lugar a que no pueda construirse una noción de capital independiente de

(w, r), las variables distributivas.

Otra forma de ver este desarrollo es el siguiente. Escribamos

$$[\boldsymbol{I} - (1+r)\boldsymbol{A}]^{-1} = \boldsymbol{I} + (1+r)\boldsymbol{A} + (1+r)^2\boldsymbol{A}^2 + (1+r)^3\boldsymbol{A}^3....$$
$$= [\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}^3...] + r[\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{A}^2 + 3\boldsymbol{A}^3...] + r^2[\boldsymbol{A}^2 + 3\boldsymbol{A}^3...] + ...$$
$$= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^i + r\sum_{i=1}^{\infty} i\boldsymbol{A}^i + r^2\sum_{i=2}^{\infty} \boldsymbol{A}^i \binom{i}{2}...$$
$$= \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} r^j \sum_{i=j}^{\infty} \boldsymbol{A}^i \binom{i}{j}$$

donde estamos usando el resultado $(1+r)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} r^k = 1 + \alpha r + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} r^2 +$ .... Entonces podemos pensar que los precios se componen de los siguientes elementos. Primero, de una remuneración al trabajo por todo el trabajo fechado, $\boldsymbol{\ell} w \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^i$. Segundo, a esto se le suma las ganancias por el capital invertido para pagar salarios en el último periodo $\boldsymbol{\ell} w \sum_{i=1}^{\infty} i\boldsymbol{A}^i$, que también contiene lo invertido en el pasado. Tercero, dos periodos hacia atrás, $r^2 \sum_{i=2}^{\infty} \boldsymbol{A}^i \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix}$ tiene lo invertido dos periodos hacia atrás, con sus respectivos trabajos fechados, y así sucesivamente. En el caso en el que $r = 0$ y $w = 1$ tenemos los valores trabajo $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\ell} \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^i$, tal que

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\ell} \sum_{j=1}^{\infty} r^j \sum_{i=j}^{\infty} \binom{i}{j} \boldsymbol{A}^i,$$

es decir los precios se componen de los valores, la remuneración al trabajo, más las ganancias de los capitalistas. De esta forma de ver el modelo surje claramente que aumentos en r disminuyen el salario real.

4.6. Mercancía estándar

Definamos $\boldsymbol{x}$ como el vector de producción bruta, y $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ como el producto neto. Supongamos que la proporción ω del producto neto va a salarios y $1-\omega$ a ganancia. Entonces tenemos,

$$r = (1-\omega)\frac{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{pAx}}.$$

Cuando $\omega = 0$, tenemos $R = \frac{\boldsymbol{p}^R(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{p}^R\boldsymbol{Ax}}$, es decir, la tasa de ganancia es tal que todo el producto va a los capitalistas. Ahora cuando $\omega > 0$, $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{p}^R$. Supongamos el caso de intensidad del capital uniforme, con precios $\bar{\boldsymbol{p}}$ que no varían cuando cambia la distribución del ingreso. Entonces,

$$R = \frac{\bar{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}}{\bar{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{Ax}},$$

y $r = R(1-\omega)$. Así, r aparece explicada por la distribución del producto neto entre trabajadores y capitalistas.

Un resultado desconcertante es que cambios en la distribución del excedente afectan los precios relativos. Con ello, la derivación anterior no puede aplicarse. La "mercancía estándar" (standard commodity) o también llamada mercancía patrón es una unidad de precios que no se ve afectada por las variables distributivas. Sraffa (1960) encuentra que si usamos el producto neto de niveles de producción asociados al autovector derecho de $\boldsymbol{A}$, entonces podemos encontrar un *numéraire* tal que los precios relativos no cambian cuando cambia la relación (w, r).

Supongamos las siguientes ecuaciones:[4]

$$\boldsymbol{p} = (1+r)\boldsymbol{pA} + w\boldsymbol{\ell}, \tag{4.14}$$

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}^* = 1, \tag{4.15}$$

$$\boldsymbol{x}^* = (1+R)\boldsymbol{Ax}^*, \tag{4.16}$$

$$\boldsymbol{\ell x}^* = 1, \tag{4.17}$$

$$\boldsymbol{x}^* \gg \boldsymbol{0}. \tag{4.18}$$

[4]Para esta parte seguimos a Kurz y Salvadori (1995).

La ecuación (4.16) se cumple para todo $\boldsymbol{x}^*$, encontrando el mayor autovalor de $\boldsymbol{A}$, que a su vez es la máxima tasa de ganancia, donde $\boldsymbol{x}^*$ es el autovector asociado. Usando la ecuación (4.14) multiplicando por $\boldsymbol{x}^*$ tenemos $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = r\boldsymbol{pAx}^* + w\boldsymbol{\ell x}^*$, entonces usando (4.15) y (4.17), $1 = r\boldsymbol{pAx}^* + w$. De (4.16), multiplicamos por $\boldsymbol{p}$, ara obtener $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x}^* = R\boldsymbol{pAx}^*$, y entonces $\boldsymbol{pAx}^* = \frac{1}{R}$. Entonces,

$$1 = \frac{r}{R} + w \quad \Rightarrow r = R(1-w), \tag{4.19}$$

$$w = \frac{R-r}{R}. \tag{4.20}$$

La mercancía estándar es entonces $\boldsymbol{z}^* = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x}^*$.

La mercancía estándar es útil porque el salario resultante es una variable entre 0 y 1 que determina la proporción del producto neto que va a los trabajadores. La desventaja es que necesariamente está expresada en proporciones que no son los que se obervarían en la realidad, $\boldsymbol{x}$, sino en un vector de producto potencialmente ficticio $\boldsymbol{x}^*$. Notar, sin embargo, que este sistema representa los mismos precios y tasas que el sistema original, solo que la unidad de medida es elegida especialmente con los mismos datos de la realidad, que pueden resumirse en la técnica $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\ell})$.

Los resultados anteriores implican que la mercancía estándar busca una relación de proporcionalidad entre los medios de producción y los productos brutos, que sea independiente de los precios. En particular para el sistema de 2 mercancías hay que buscar (x_1^*, x_2^*), tal que

$$a_{11}x_1^* + a_{12}x_2^* = \varphi^* x_1^*,$$

$$a_{21}x_1^* + a_{22}x_2^* = \varphi^* x_2^*.$$

Para que este sistema tenga una solución positiva, $(\varphi^* - a_{11})(\varphi^* - a_{22}) - a_{12}a_{21} = 0$, o $\varphi^* = (1+R)^{-1}$. Entonces se puede encontrar la normalización, $x_2^*/x_1^* = (\varphi^* - a_{11})/a_{12} = a_{21}/(\varphi^* - a_{22})$.

4.6.1. Variación para salario pagado ex-ante

El mismo esquema se puede obtener si asumimos que los salarios se pagan ex-ante como en el Cap. 6. Esto se usa para enfatizar que el capital incluye bienes intermedios (capital constante) y trabajo (capital variable). Como vamos a ver no hay diferencias sustanciales entre ambos modelos. En este caso reemplazaríamos la ecuación (4.14) con

$$\boldsymbol{p} = (1+\tilde{r})(\boldsymbol{pA} + \tilde{w}\boldsymbol{\ell}). \tag{4.21}$$

Para distinguirlo del modelo anterior usamos el tilde ˜, en referencia a la tasa de ganancia y el salario del modelo marxista. Notar que $(1+\tilde{r})\tilde{w} = w$, donde w es el salario del modelo sraffiano.

Resolviendo, tenemos

$$\tilde{r} = \frac{(1-\tilde{w})R}{1+\tilde{w}R}, \tag{4.22}$$

$$\tilde{w} = \frac{R-\tilde{r}}{(1+\tilde{r})R}. \tag{4.23}$$

Notar que en este caso, $\tilde{w}$ no representa la proporción del producto neto que va a los trabajadores, pero $(1+\tilde{r})^{-1}$ de esa proporción. En ambos casos, sin embargo, R es la misma. La figura 4.2 representa esta relación.

4.6.2. Ejemplo numérico

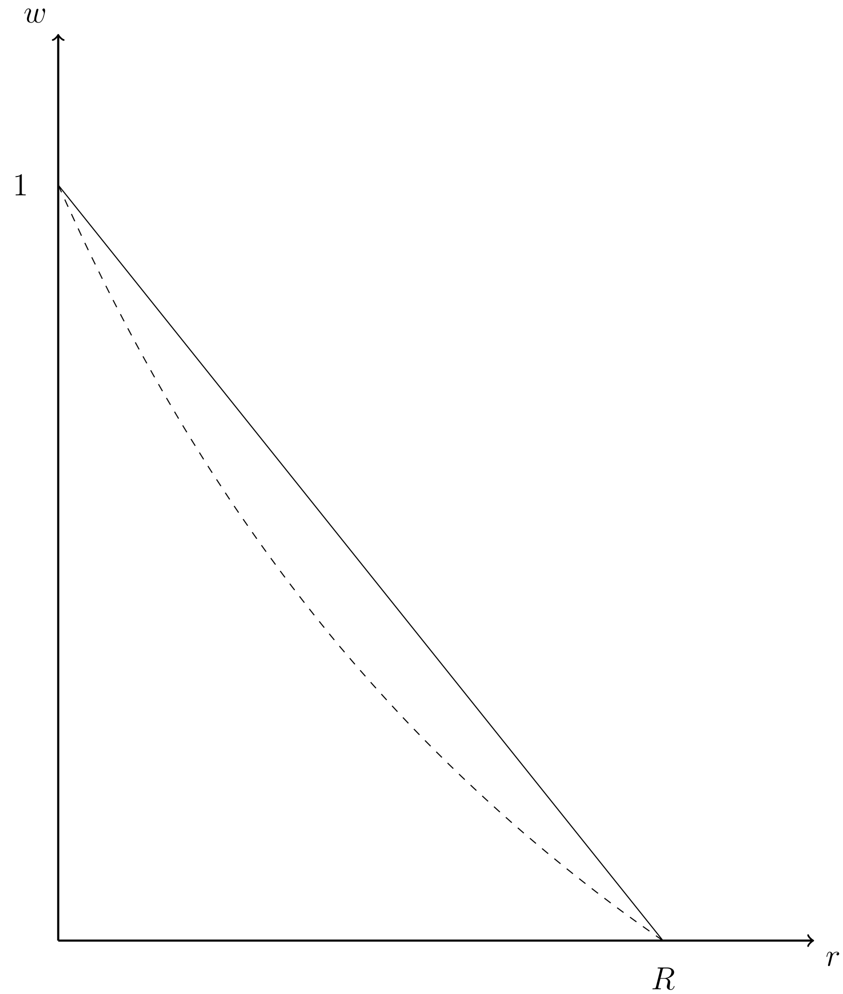
Supongamos el siguiente sistema, (**?**, pp.19-20), para ilustrar la mercancía estándar,

$$90\, ton.\ hierro \oplus 120\, ton.\ \text{carbón} \oplus 60\, ton.\ trigo \oplus 3/16\, trabajo \Rightarrow 180\, ton.\ hierro,$$

$$50\, ton.\ hierro \oplus 125\, ton.\ \text{carbón} \oplus 150\, ton.\ trigo \oplus 5/16\, trabajo \Rightarrow 450\, ton.\ \text{carbón},$$

$$40\, ton.\ hierro \oplus 40\, ton.\ \text{carbón} \oplus 200\, ton.\ trigo \oplus 8/16\, trabajo \Rightarrow 480\, ton.\ trigo.$$

Figura 4.2: Relación salario-tasa de ganancia para la mercancía estándar



Notas: Línea sólida $w = \frac{R-r}{R}$, línea punteada $\tilde{w} = \frac{R-\tilde{r}}{(1+\tilde{r})R}$.

Notar que en este sistema 180 *ton.* de hierro, 285 *ton.* de carbón y 410 *ton.* de trigo son los medios de producción. El ingreso nacional o producto neto sólo incluye 165 *ton.* de carbón y 70 *ton.* de trigo. Las proporciones de los productos brutos 180 : 450 : 480 es diferente a la de medios de producción 180 : 285 : 410. Si esa proporción fuera la misma tendríamos la mercancía estándar.

En el ejemplo se puede hacer la escala artificial $1 : \frac{3}{5} : \frac{3}{4}$ tal que

$$90\, ton.\ hierro \oplus 120\, ton.\ \text{carbón} \oplus 60\, ton.\ trigo \oplus 3/16\, trabajo \Rightarrow 180\, ton.\ hierro,$$

$$30\, ton.\ hierro \oplus 75\, ton.\ \text{carbón} \oplus 90\, ton.\ trigo \oplus 3/16\, trabajo \Rightarrow 270\, ton.\ \text{carbón},$$

$$30\, ton.\ hierro \oplus 30\, ton.\ \text{carbón} \oplus 150\, ton.\ trigo \oplus 6/16\, trabajo \Rightarrow 360\, ton.\ trigo,$$

y en este sistema 150 *ton.* de hierro, 225 *ton.* de carbón y 300 *ton.* de trigo son los medios de producción, que cumple con la misma proporción que la producción bruta, 180 : 270 : 360 es la misma que 150 : 225 : 300. Entonces la mercancía estándar compuesta es 1 *ton. hierro* : $1\frac{1}{2}$ *ton.* carbón : 2 *ton. trigo.*

Cabe notar que en este caso el excedente, calculado como proporción para cada mercancía de 20 %, es el mismo en todos los productos. O sea,

$$(90 + 30 + 30)(1 + 20/100) = 180,$$

$$(120 + 75 + 30)(1 + 20/100) = 270,$$

$$(60 + 90 + 150)(1 + 20/100) = 360.$$

En este sistema estándar la tasa de beneficios aparece para cualquier nivel de precios con $R = 0{,}20$. Comparando con la solución general presentada arriba, estamos expresando la ecuación $\boldsymbol{x}^* = (1 + R)\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^*$.

4.7. Ejercicios

Ejercicio 4.7.1. *Encontrar los precios para este ejemplo (Sraffa, 1960, pp.3-4):*

$$240 \text{ } ton.\ trigo \oplus 12 \text{ } ton.\ hierro \oplus 18 \text{ } cerdos \Rightarrow 450 \text{ } ton.\ trigo,$$

$$90 \text{ } ton.\ trigo \oplus 6 \text{ } ton.\ hierro \oplus 12 \text{ } cerdos \Rightarrow 21 \text{ } ton.\ hierro,$$

$$120 \text{ } ton.\ trigo \oplus 3 \text{ } ton.\ hierro \oplus 30 \text{ } cerdos \Rightarrow 60 \text{ } cerdos.$$

(Solución: 10 ton. trigo = 1 ton. hierro = 2 cerdos.)

Siguiendo este ejemplo, encontrar la mercancía estándar.

Ejercicio 4.7.2. *Encontrar los precios para este ejemplo (Abraham-Frois y Berrebi, 1997, p.41):* $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 8/15 & 1/5 & 4/15 \\ 4/7 & 2/7 & 1/7 \\ 3/10 & 1/5 & 1/2 \end{bmatrix}$*. Tiene autovalor dominante* 1*, con autovector asociado* $\boldsymbol{p} = [1{,}5 \ \ 0{,}7 \ \ 1]$ *(o cualquier transformación homotética, ej.* $\boldsymbol{p} = [1 \ \ 0{,}7/1{,}5 \ \ 1/1{,}5]$*).*

Apéndice

Sistemas de ecuaciones lineales homogéneos (para garantizar $\boldsymbol{p} \gg 0$ en el modelo de subsistencia)

Consideremos primero el sistema de subsistencia. En este caso podemos escribirlo como

$$\boldsymbol{pA} = \boldsymbol{p},$$

o

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{pM} = \boldsymbol{0}.$$

Este sistema se llama sistema de ecuaciones lineales **homogéneo**. Este sistema siempre tiene al menos una solución, $\boldsymbol{p} = \mathbf{0}$, llamada la *solución trivial*. Si $\boldsymbol{M}$ es no singular (es decir determinante distinto de 0), el sistema tiene solo la solución trivial. Para que tenga otras soluciones además de la trivial entonces $det(\boldsymbol{M}) = 0$, en cuyo caso, el sistema tiene infinitas soluciones no cero. En realidad, en términos económicos esto significa que la solución se expresa en términos de precios relativos. Éste es el caso del sistema de subsistencia del Cap. 2 y la ecuación (2.3).

Teorema de Perron-Frobenius (para garantizar $\boldsymbol{p} \gg 0$)

Dada una matriz $\boldsymbol{A}$ (de dimensión $n \times n$), ¿existe un escalar λ y un vector $\boldsymbol{p}$ tal que $\boldsymbol{pA} = \lambda\boldsymbol{p}$? Esto ocurre si $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) = 0$.

λ es un autovalor o raíz característica. $\boldsymbol{p}$ es un autovector asociado a esa raíz.

Existe una solución no trivial (no cero) para $\boldsymbol{p}$ si y solo si $det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) = 0$ (por propiedades de sistemas homogéneos). Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz $n \times n$, entonces $|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}| = 0$ es un polinomio de grado n en λ.

Para cada una de las soluciones λ_j (reales o complejas), hay un vector asociado $\boldsymbol{p}_j$, $j = 1, .., n$.

Si $\boldsymbol{A} \geqq 0$ es una matriz **no negativa irreducible** (indescomponible, ver más abajo) (cada elemento es no negativo, las filas y columnas no pueden permutarse tal que $\boldsymbol{A}$ tiene un rectángulo de ceros en la esquina abajo-izquierda), entonces:

(i) solo una de las raíces, λ_m (raíz de Frobenius) tiene asociado un vector $\boldsymbol{p}_m$ estrictamente positivo,
(ii) esa raíz es al menos tan grande como las otras en módulo,
(iii) es además real, contínua y creciente en cada elemento de $\boldsymbol{A}$.

Matrices indescomponibles (para analizar bienes básicos)

Una **permutación** es una función uno-a-uno del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ a sí mismo. Esta función sirve para intercambiar el orden de un conjunto ordenado. Una **matriz de permutación** $\boldsymbol{P}$ permuta las columnas (o filas) de una matriz identidad. Para estas matrices $\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}'$.

Si a una matriz cualquiera $\boldsymbol{A}$ le aplicamos $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ entonces quedan intercambiadas las columnas y las filas (simultáneamente) de $\boldsymbol{A}$. Si $\boldsymbol{A}$ es la matriz de insumos de Leontief entonces $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ renumera las industrias y sectores.

Sea una matriz $n \times n$ $\boldsymbol{A}$, se la llama **descomponible** si existe una matriz de permutación $\boldsymbol{P}$ tal que

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix},$$

donde $\boldsymbol{A}_{11}$ y $\boldsymbol{A}_{22}$ son submatrices cuadradas. Si esto no es posible, entonces $\boldsymbol{A}$, se la define como **indescomponible**. Si $\boldsymbol{A}$ se puede reducir, entonces hay dos tipos de industrias. Unas (tipo 1, básicas) que no necesitan inputs de las otras (tipo 2, no básicas).

Si además tenemos que existe una matriz de permutación $\boldsymbol{P}$ tal que

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix},$$

esta matriz se define como **completamente descomponible**.

Capítulo 5

Elección de técnica y capital

5.1. Introducción

Los capítulos anteriores se basaron en un supuesto simplificador de coeficientes técnicos fijos, en un modelo de rendimientos constantes a escala. Como es explicado por Sraffa (1960) ninguno de estos supuestos son estrictamente necesarios para la validez del modelo. Por un lado, podemos pensar en un conjunto de técnicas (finitas o infinitas) que conviven y que son elegidas de acuerdo a criterios económicos. Por otro lado, los coeficientes pueden ser alterados a medida que cambia la escala. En todo caso, el modelo de reproducción simple está determinado para mantener un nivel dado de producción.

El criterio para elegir entre técnicas es el de ganancias por fuera de lo normal. El modelo sraffiano postula que los capitalistas buscan obtener una tasa uniforme de ganancia, y que la competencia entre capitales lleva a la igualación, lo que podemos llamar una posición de largo plazo. Para hacer compatible la elección de técnica con esta igualdad se requiere que dadas las variables distributivas, (w, r), se elija la técnica que minimiza los costos de producción. Se busca así obtener beneficios extras, es decir, adicionales por encima de la tasa de ganancia. En el caso en que la elección de técnica se refiera a una mercancía no básica, la misma no tiene efectos sobre la tasa de ganancia, con lo cual la elección puede analizarse en términos de una comparación inmediata entre técnicas. Para elección de técnica en mercancías básicas, por el contrario, éstas tienen que ser evaluadas teniendo en cuenta el efecto total sobre el proceso productivo. De todas maneras, un elemento central es que si hubiera una técnica que produce a un costo menor, todos los precios deberían bajar dado que también bajarían sus costos. Otra forma de verlo, es que dada una tasa de ganancia, una nueva o distinta técnica tiene que aumentar el salario real, lo que se conoce como el Teorema de Okishio (1961).

Podemos definir una tecnología como un conjunto de técnicas disponibles en un momento del tiempo. Así, un cambio tecnológico implica una cambio en las técnicas disponibles. Como es de esperar, ambos conceptos están entralazados. En el modelo marxista los capitalistas buscan obtener mayor plusvalía a partir de cambiar el proceso de producción, mediante el cambio tecnológico. Los aspectos específicos del modelo marxista se analizan en 6 en base a los modelos de este capítulo.

La generalización a distintas técnicas permite entender qué es el capital, y cómo éste se relaciona con las variables distributivas. Un punto importante en el modelo sraffiano, que dió lugar a la llamada Crítica de Cambridge, es que no es posible tener una noción coherente del capital que se determina como resultado de la oferta y demanda. Más bien por el contrario, puede haber cualquier tipo de relación entre la elección de técnica (que debería poseer el capital) y la tasa de ganancia.

5.2. Elección de técnica para mercancías no básicas

Supongamos que la mercancía q es no básica.[1] También supongamos que no se usa en ninguna otra mercancía no básica. Supongamos tres técnicas dis-

[1] Para esta sección seguimos la modelización de Pasinetti (1977, cap.6).

ponibles para la mercancía q, δ, ϵ, τ, con técnicas $[\boldsymbol{A}_{1q}^{(\delta)}, \ell_q^{(\delta)}], [\boldsymbol{A}_{1q}^{(\epsilon)}, \ell_q^{(\epsilon)}], [\boldsymbol{A}_{1q}^{(\tau)}, \ell_q^{(\tau)}]$. En este caso la matriz $\boldsymbol{A}_{1\cdot}$ se refiere a los insumos requeridos para la producción de esta mercancía.

Los costos de producción de las tres técnicas son

$$p_q^{(\delta)} = \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{A}_{1q}^{(\delta)}(1+r) + \ell_q^{(\delta)} w,$$

$$p_q^{(\epsilon)} = \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{A}_{1q}^{(\epsilon)}(1+r) + \ell_q^{(\epsilon)} w,$$

$$p_q^{(\tau)} = \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{A}_{1q}^{(\tau)}(1+r) + \ell_q^{(\tau)} w.$$

Notar que todas las magnitudes están dadas dado que la mercancía no básica no tiene efecto sobre las variables distributivas. En este caso sólo hace falta encontrar la técnica que tiene el menor precio de producción. La intuición es que dados todos los precios de las mercancías básicas y las variables distributivas, la única elección entre técnicas es minimizar el costo de producción.

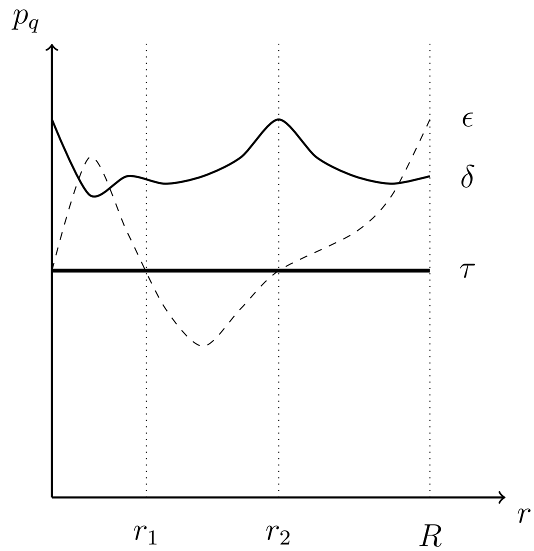
Consideremos el ejemplo de la Figura 5.1. En este caso la técnica δ es obsoleta y nunca se va a elegir. Pero ninguno de las otras dos técnicas, ϵ o τ, es superior en todo el rango de variación de la tasa de ganancia, y la elección depende del nivel de r. r_1 y r_2 son *switch points* (ver abajo) donde ambas técnicas coinciden en todas las variables.

5.3. Elección de técnica para mercancías básicas

Supongamos que la mercancía h es básica.[2] Supongamos tres técnicas disponibles para h, α, β, γ, con técnicas $[\boldsymbol{A}_{1h}^{(\alpha)}, \ell_h^{(\alpha)}], [\boldsymbol{A}_{1h}^{(\beta)}, \ell_h^{(\beta)}], [\boldsymbol{A}_{1h}^{(\gamma)}, \ell_h^{(\gamma)}]$. Supongamos que los precios de γ se están usando.

[2]Para esta sección seguimos la modelización de Pasinetti (1977, cap.6).

Figura 5.1: Elección de técnica para mercancías no básicas



Los costos de producción de las tres técnicas son

$$p_h^{(\alpha)} = \boldsymbol{p}_1^{(\gamma)} \boldsymbol{A}_{1h}^{(\alpha)}(1+r) + \ell^{(\alpha)} w^{(\gamma)},$$

$$p_h^{(\beta)} = \boldsymbol{p}_1^{(\gamma)} \boldsymbol{A}_{1h}^{(\beta)}(1+r) + \ell^{(\beta)} w^{(\gamma)},$$

$$p_h^{(\gamma)} = \boldsymbol{p}_1^{(\gamma)} \boldsymbol{A}_{1h}^{(\gamma)}(1+r) + \ell^{(\gamma)} w^{(\gamma)}.$$

En este caso la comparación solo es provisional, porque un cambio en h afecta toda la estructura de costos dado que ésta entra como insumo en las otras mercancías. Hay que considerar toda la técnica, $[\boldsymbol{A}_1^{(\alpha)}, \boldsymbol{\ell}^{(\alpha)}], [\boldsymbol{A}_1^{(\beta)}, \boldsymbol{\ell}_h^{(\beta)}], [\boldsymbol{A}_1^{(\gamma)}, \boldsymbol{\ell}^{(\gamma)}]$. El análisis debe hacerse en base a las curvas (w, r) que se generan en cada técnica. Si una técnica es minimizadora de costos, entonces también minimiza los costos en todos los otros sectores en los que entra como bien intermedio.

5.3.1. Switch points y reswitching

Los puntos donde se cambia de técnica a lo largo de la curva (w, r) se denominan *switch points*. Éstos pueden ser como máximo k (la cantidad de mercancías básicas). Esto es porque si tenemos dos técnicas, y cada técnica es en realidad un polinomio de grado k en términos de (w, r), entonces puede haber un máximo de k cruces en las curvas que se generan.

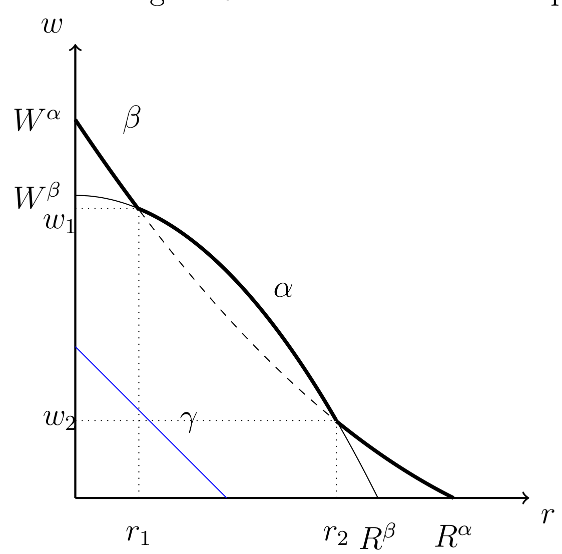
En la Figura 5.2 hay dos switch points, r_1 y r_2, donde para $0 \leq r < r_1$ se prefiere α, para $r_1 < r < r_2$ se prefiere β, y para $r_2 < r \leq R^{(\alpha)}$ se prefiere α de vuelta. Éste fenomeno se conoce como *reswitching*. Esto constituye la mayor crítica a la economía neoclásica ya que mayor o menor r no necesariamente implican mayor o menor capital. En cada switch point entre α y β, $\boldsymbol{p}^{(\alpha)} = \boldsymbol{p}^{(\beta)}$. (*Prueba*: Sino habría preferencia por una u otra técnica más beneficiosa. Pero entonces todas los otros precios son iguales dado que no cambia la técnica.) Por otro lado, si una técnica es más beneficiosa que la otra, entonces tiene precios estrictamente menores (en términos de salarios). (*Prueba*: Usemos $w = 1$. Si se usa α por sobre β, entonces $p_h^{(\alpha)} < p_h^{(\beta)}$. Pero entonces todos los otros precios deberán bajar, resultando en $\boldsymbol{p}^{(\alpha)} < \boldsymbol{p}^{(\beta)}$.) Estas relaciones son independientes del numerario.

El fenómeno de **reswitching** es el uso de la misma técnica a distintos niveles de las variables distributivas. Es central porque implica que el capital, que usualmente se asocia a una técnica determinada con mayor o menor intensidad del mismo, no tiene una relación monótona con r. Es decir, si hubiera un 'factor capital' la técnica que usa más de este factor (relativo al trabajo) debería usarse menos cuando aumenta r (pensar en la sustitución de K/L cuando cambia r/w).

Un punto interesante es que la frontera tecnológica de la distribución del ingreso es estrictamente decreciente a medida que se incrementa r. En la Figura 5.2 la linea que está marcada en negrita es la frontera tecnológica, donde se alterna entre las técnicas α y β.

Un punto relacionado es que en cada cambio de técnica, dada una r

Figura 5.2: Elección de técnica para mercancías no básicas



factible entonces el salario real aumenta. Es decir, si nos concentramos en un mismo valor de r, la elección de técnicas puede hacerse simplemente eligiendo en base a las curvas de (w, r), y en particular, mirando la frontera exterior de todas las curvas. Así, la elección para una r dada corresponde a buscar aquella que nos da un salario mayor. Ésto se conoce como el Teorema ade Okishio (1961) y juega un rol central en el debate de la teoría marxista expuesta en los siguientes capítulos.

5.4. Modelos para dos mercancías básicas

Supongamos que hay dos mercancías, I y II, y que la II se puede producir con dos técnicas, α y β:[3]

- $(I, II\alpha) = (a_{11}, a_{21}, \ell_1; a^\alpha_{12}, a^\alpha_{22}, \ell^\alpha_2)$;
- $(I, II\beta) = (a_{11}, a_{21}, \ell_1; a^\beta_{12}, a^\beta_{22}, \ell^\beta_2)$.

[3]Para esta sección seguimos la modelización de Woods (1990, cap.6).

Para las dos técnicas podemos usar las fórmulas derivadas en el modelo sraffiano, Cap. 3, Sec. 3.3:

$$w^\iota(r) = f^\iota(r)/g^\iota(r),$$

$$p^\iota(r) = h^\iota(r)/g^\iota(r),$$

donde

$$f^\iota(r) = (1-(1+r)a_{11})\,(1-(1+r)a^\iota_{22}) - (1+r)^2 a^\iota_{12}a_{21},$$

$$g^\iota(r) = \ell_1\,(1-(1+r)a^\iota_{22}) + (1+r)\ell^\iota_2 a_{21},$$

$$h^\iota(r) = \ell_2\,(1-(1+r)a_{11}) + (1+r)\ell_1 a^\iota_{12},$$

$$\iota = \alpha, \beta.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} w^\alpha - w^\beta &= f^\alpha(r)/g^\alpha(r) - f^\beta(r)/g^\beta(r) \\ &= (1+r)a_{21}\left(\ell^\beta_2 f^\alpha(r) - \ell^\alpha_2 f^\beta(r) - (1+r)\ell_1 k(r)\right)/g^\alpha(r)g^\beta(r), \end{aligned} \tag{5.1}$$

donde

$$k(r) = a^\alpha_{12}\left(1-(1+r)a^\beta_{22}\right) - a^\beta_{12}\,(1-(1+r)a^\alpha_{22})\,.$$

Además,

$$\begin{aligned} p^\alpha - p^\beta &= h^\alpha(r)/g^\alpha(r) - h^\beta(r)/g^\beta(r) \\ &= \ell_1\left(\ell^\beta_2 f^\alpha(r) - \ell^\alpha_2 f^\beta(r) - (1+r)\ell_1 k(r)\right)/g^\alpha(r)g^\beta(r). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Entonces,

$$p^\alpha - p^\beta = \ell_1(w^\alpha - w^\beta)/(1+r)a_{21},$$

$$sign(p^\alpha - p^\beta) = -sign(w^\alpha - w^\beta).$$

Supongamos que (α) se está empleando a una tasa $\bar{r}$ cuando $(II\beta)$ aparece. El costo de operar $(II\beta)$ a precios (α) es

$$c_2(\beta : \alpha) = (1+\bar{r})(a_{12}^{\beta} + p^{\beta} a_{22}^{\beta}) + w^{\alpha} \ell_2^{\beta}.$$

Sea $c(\beta : \alpha)$ la ganancia o pérdida relativa a la tasa normal de operar $(II\beta)$ a precios (α),

$$s_2(\beta : \alpha) = p^{\alpha} - c_2(\beta, \alpha) = \left(1 - (1+\bar{r})a_{22}^{\beta}\right) p^{\alpha} - (1+\bar{r})a_{12}^{\beta} - w^{\alpha}\ell_2^{\beta}.$$

Ahora tenemos que $s_2(\beta, \alpha) = \left(\ell_2^{\alpha} f^{\beta}(\bar{r}) - \ell_2^{\beta} f^{\alpha}(\bar{r}) + (1+\bar{r})\ell_1 k(\bar{r})\right) / g^{\alpha}(\bar{r})$. Entonces,

$$s_2(\beta : \alpha) = sign(w^{\beta} - w^{\alpha}),$$

dado que $g^{\iota}(r) > 0$, $\iota = \alpha, \beta$.

Si $s_2(\beta : \alpha) > 0$ entonces $(II\beta)$ reduce costos a precios (α) y está asociado con ganancias extras en el sector II.

La técnica $(\theta) = (I, II\theta)$ is minimizadora de costos a la tasa $\bar{r}(< R^{\theta})$ si y solo si $s_2(\psi : \theta) < 0$ para cualquier otra técnica $(\psi) = (I, II\psi)$.

Calculemos ahora $(II\alpha)$ reduce costos a precios (β).

$$s_2(\alpha : \beta) = \left(\ell_2^{\beta} f^{\alpha}(\bar{r}) - \ell_2^{\alpha} f^{\beta}(\bar{r}) + (1+\bar{r})\ell_1 k(\bar{r})\right) / g^{\beta}(\bar{r}),$$

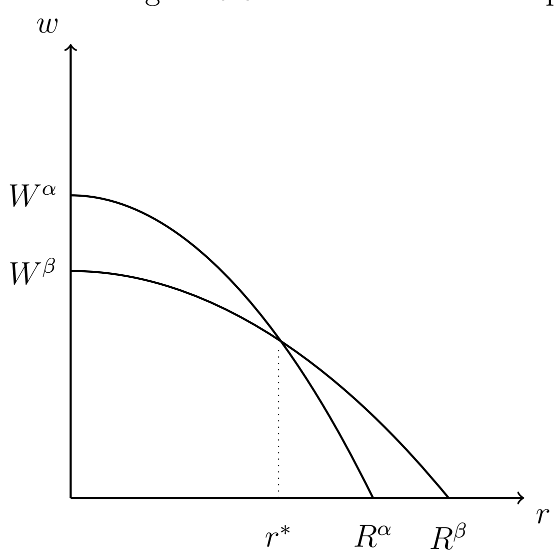
$$s_2(\alpha : \beta) = -sign(w^{\beta} - w^{\alpha}) = -s_2(\beta : \alpha).$$

Se puede demostrar que si $s_2(\beta : \alpha) > 0$ a la tasa $\bar{r} < R^{\alpha}$, entonces $\bar{r} < R^{\beta}$ (Woods, 1990, p.80).

En el ejemplo de la Figura 5.3

$$\begin{array}{lll} (\alpha) & minimiza\ para & 0 \leq r < r^* \\ (\beta) & minimiza\ para & r^* < r \leq R^{\beta} \end{array}$$

Figura 5.3: Elección de técnica para mercancías no básicas



Hay una sóla técnica factible en $R^\alpha < r \leq R^\beta$. Ambas técnicas minimizan en r^*, un **switch point**.

Notemos que en el modelo de dos mercancías básicas puede haber un máximo de 2 switching points. Una condición necesaria para que haya reswitching en el caso de dos mercancías básicas es que la curva (w, r) tenga la misma curvatura, y ninguna sea lineal. Es decir, que haya dos técnicas y que las dos son estrictamente cóncavas o estrictamente convexas. Otra es que $R^\alpha > R^\beta$ y $W^\alpha > W^\beta$. Este punto está discutido en Woods (1990, cap.6) y tiene que ver con el cambio en los precios asociado a la curvatura de cada técnica. Como ilustración si una de las curvas es lineal, entonces no cambian los precios relativos cuando cambia r (o w), mientras que la concavidad/convexidad está asociada a una dirección particular de cambios en los precios. En el caso de dos mercancías hay como máximo dos switch points, con lo cual si las dos técnicas coincidieron en un switch point, la curvatura implica una dirección particular de cambios en los precios para llegar al otro.

5.5. Efectos de precio y efectos reales de Wicksell

Supongamos una economía donde todo está expresado en términos per capita, y hay solamente un bien de consumo:

$$q = rk + w.$$

q representa el producto neto per cápita, k el 'factor capital' (haciendo abuso de la terminología neoclásica), w el salario y r la tasa de ganancia, que se aplica sobre k en su totalidad.[4] Entonces, podemos definir implícitamente al capital como

$$k = \frac{q - w}{r}.$$

Cuando $r = 0$, $q = w_{max}$, es decir todo el producto se destina al pago de los trabajadores. Definamos,

$$w = w_{max} - f(r),$$

donde $r = 0$, $f(0) = 0$ y $f'(r) > 0$. Entonces,

$$k = \frac{q - w}{r} = \frac{w_{max} - (w_{max} - f(r)}{r} = \frac{f(r)}{r},$$

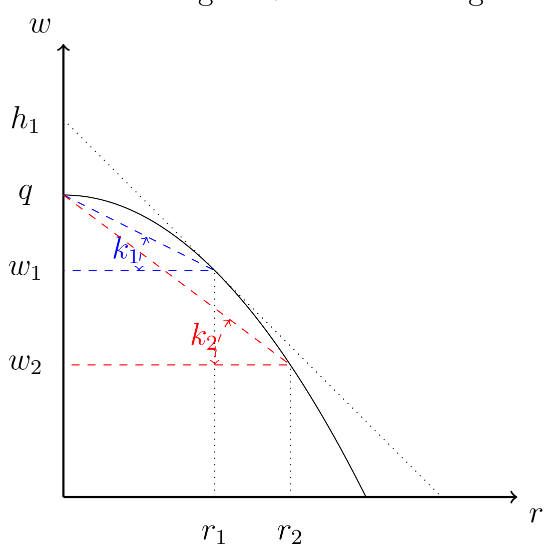
$$\frac{dk}{dr} = \frac{1}{r^2}\left(f'(r)r - f(r)\right).$$

El principal resultado es que $\frac{dk}{dr} >< 0$ si $\frac{f'(r)r}{f(r)} >< 1$. Es decir, la relación entre el stock capital y la tasa de interés depende de la forma de la frontera (w, r). El capital, entonces, definido de esta manera cambia de acuerdo a como cambia r. Este modelo se denomina de **efectos de precio de Wicksell**.[5]

[4] Para esta sección seguimos la modelización de Harcourt (1972, cap.4).

[5] En referencia al trabajo de Wicksell (1901).

Figura 5.4: Efectos negativos de precio de Wicksell



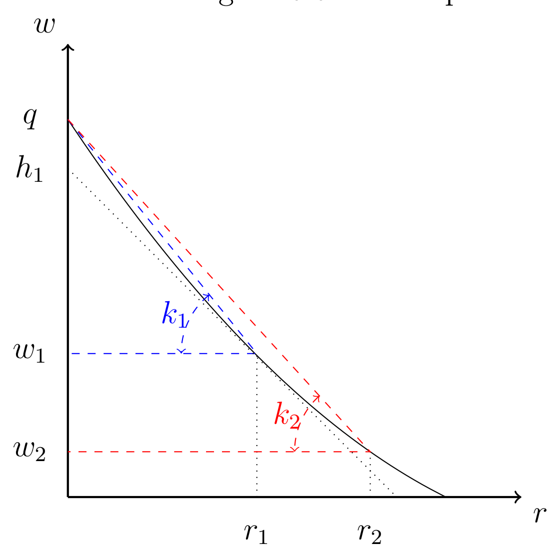
Veamos los siguientes casos.

Efecto negativo de precio de Wicksell: el valor del capital es mayor cuanto mayor es el valor de r. Este caso se representa en la Figura 5.4 donde tenemos una curva (w, r) cóncava al origen. Tenemos, $q = w_{max}$. Por otro lado $f'(r_1)r_1 = (h_1 - w_1)$, mientras que $q - w_1 = f(r_1)$. Entonces podemos definir el capital implícitamente como $(q - w_1)/r_1 = k(r_1)$. Acá $(h_1 - w_1)/(q - w_1) > 1$, entonces $\frac{d\ k}{d\ r} > 0$. Por otro lado, si tomamos dos posiciones sobre la curva, (w_1, r_1) y (w_2, r_2) vemos que $k2 > k_1$.

Efecto neutro de precio de Wicksell: el valor del capital es el mismo cuanto mayor/menor es el valor de r. Este caso la curva (w, r) es lineal.

Efecto positivo de precio de Wicksell: el valor del capital es mayor cuanto menor es el valor de r. Este caso se representa en la Figura donde tenemos una curva (w, r) convexa al origen. Tenemos, $q = w_{max}$. Por otro lado $f'(r_1)r_1 = (h_1 - w_1)$, mientras que $q - w_1 = f(r_1)$. Entonces podemos definir el capital implícitamente como $(q - w_1)/r_1 = k(r_1)$. Acá $(h_1 - w_1)/(q - w_1) < 1$, entonces $\frac{d\ k}{d\ r} < 0$. Por otro lado, si tomamos dos posiciones sobre la curva, (w_1, r_1) y (w_2, r_2) vemos que $k2 < k_1$.

Figura 5.5: Efecto positivo de precio de Wicksell



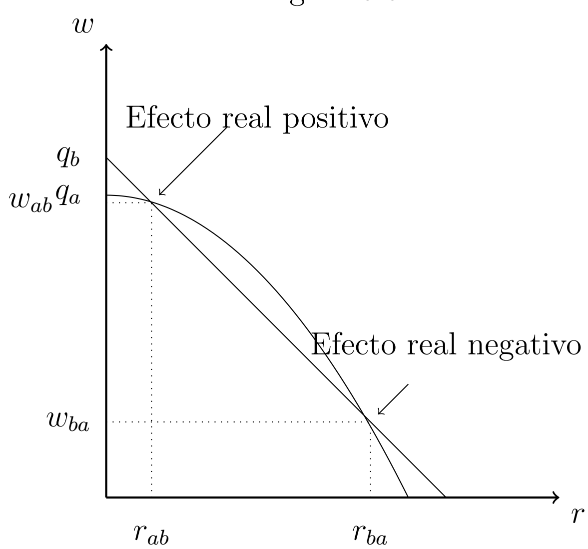
Los **efectos reales de Wicksell** ocurren en los switch points, con un cambio 'real' de técnica, en contraposición con los efectos precio donde en realidad no ocurre ningún cambio real. La Figura 5.6 ilustra un modelo con dos switch points. En cada uno de los switch points ocurre un efecto real de este tipo.

Efecto positivo real de Wicksell: se elige una técnica con mayor q y mayor k cuando decrece r. La técnica b es equi-beneficiosa con a en r_{ab}, pero se vuelve más beneficiosa con $r < r_{ba}$.

Efecto negativo real de Wicksell: se elige una técnica con menor q y menor k cuando decrece r. La técnica a es equi-beneficiosa con b en r_{ba}, pero se vuelve más beneficiosa con $r < r_{ba}$.

Los resultados anteriores determinan que la relación entre k y r puede ser de cualquier tipo, dando lugar a que r no puede usarse como el precio que determina la oferta y demanda de capital, como sea que éste fuera definido. La llamada Controversia de Cambridge se centra en ésta imposibilidad de llegar a los resultados estándar en la economía neoclásica. Si consideramos los efectos negativos de precio de Wicksell, obtenemos que a medida que

Figura 5.6: Efectos reales de Wicksell



aumenta r, también aumenta k, es decir el capital per capita. Como resultado tenemos exactamente el resultado opuesto a la relación que uno esperaría, dado que al aumentar r se deberían usar métodos cada vez menos intensivas en capital. Notar que lo anterior, incluso, es para una misma técnica, es decir que en ningún momento cambió algo en términos físicos o reales.

Los efectos reales de Wicksell sí tienen como resultado cambios en las técnicas utilizadas, y no puede determinarse a priori cuál es la relación con r. Es decir, un aumento de r puede dar lugar a una técnica más o menos intensiva en capital. De hecho esto también se puede observar si computamos los casos para salario 0. En este caso $q = r_{max}k$ por lo cual $r_{max} = q/k$, lo que se puede encontrar en los gráficos donde las curva salario-ganancia cruzan el eje horizontal. Cambios en la técnica a medida que nos desplazamos en la frontra exterior para distintos r puede estar asociados a diversas configuraciones de q/k.

Stiglitz (1974) relativiza la relevancia de estos resultados, comparándolo con los bienes Giffen (donde aumenta la demanda cuanto aumenta el precio), algo que puede ocurrir pero que de ninguna manera son la norma. Sin embargo, distintos trabajos han señalado que éste modelo imposibilita usar dotaciones de capital como dadas y por ende determinar r como el resultado de oferta y demanda, algo necesario para los modelos de equilibrio general.[6] De hecho no es patológico ni mucho menos encontrar una curva de capital-tasa de ganancia que tiene pendiente negativa, positiva o que cambia de uno a otro. Garegnani (1970) usa un ejemplo en el que los coeficientes que definen cada técnica cambian en forma continua, entonces cada punto de la frontera de (w, r) corresponde a una técnica diferente. Así se puede obtener todo tipo de relaciones entre el capital y la tasa de ganancia.

[6] Ver la extensa discusión en el libro de Petri (1989) y Dvoskin y Petri (2017).

Capítulo 6

Teoría marxista (i)

6.1. Introducción

En la teoría marxista el trabajo juega un rol central para explicar el sistema capitalista. En una primera instancia, el valor-trabajo es lo que determina los valores de cambio entre mercancías que son proporcionales a las horas de trabajo necesarias para produir cada una. Éste intercambio no es válido cuando entra en juego las mercancías que se usan como capital. Marx y la economía marxista construyen un marco conceptual para explicar el sistema capitalista a partir de la relación entre **valores** (trabajo "abstracto" socialmente necesario) y **precios** (expresiones monetarios de las mercancías, en las que se expresan el resto de los elementos centrales de capitalismo: salarios, ganancias, etc.).

Un punto central de la teoría del valor trabajo marxista es que las formas de la ganancia (beneficio, renta, interés) son el resultado de la explotación del trabajador,[1] lo que se denomina extracción de plusvalía.

[1] En la definición de Foley (1986, p.39), "una situación en la cual una persona le da a otra algo por lo que no recibe algo equivalente se llama comunmente explotación." También en relación a la centralidad del valor trabajo, "Si no se acepta el postulado que el trabajo produce el total del valor agregado, no se verá ninguna base en la explicación del trabajo asalariado como explotación."

Como veremos en este capítulo (Teorema Fundamental Marxiano, TFM) no hay beneficios sin explotación. Este capítulo también presenta una primera aproximación a la relación entre los valores y los precios de producción. El siguiente capítulo (Cáp. 7) analiza esta relación en más detalle.

En segundo lugar, se estudia el efecto del cambio tecnológico en este modelo. Marx reconocía que el progreso tecnológico juega un rol fundamental para el desarrollo capitalista. Los capitalistas buscan incorporar nuevas tecnologías para obtener ganancias mayores, lo cual da lugar a un proceso continuo de competencia entre capitales. En general, Marx consideraba que las nuevas teconologías están asociadas a un mayor uso del capital constante vis-à-vis el capital variable. Así se obtiene como resultado un aumento de la composición orgánica, lo que reduce la tasa de ganancia medida en valores. Éste proceso se denomina tandencia decreciente de la tasa de ganancia y fue objeto de largos debates teóricos y empíricos.

6.2. Valor trabajo y plusvalía

6.2.1. Valor trabajo en el modelo de dos mercancías

Tomemos el modelo de dos mercancías, que reescribimos como

$$\begin{aligned} a_{11} \oplus a_{21} \oplus \ell_1 &\Rightarrow 1, \\ a_{12} \oplus a_{22} \oplus \ell_2 &\Rightarrow 1. \end{aligned}$$

Definamos los **valores trabajo** (llamados también coeficientes de trabajo verticalmente integrados) como $\boldsymbol{v} = [v_1 \ v_2]$ que se obtienen a partir de

$$v_1 a_{11} + v_2 a_{21} + \ell_1 = v_1,$$

$$v_1 a_{12} + v_2 a_{22} + \ell_2 = v_2.$$

Notar que implícitamente estamos resolviendo por el modelo sraffiano con salario nominal, haciendo $w = 1$ y $r = 0$.

Despejando de la primera ecuación, $v_1 = (v_2 a_{21} + \ell_1)/(1 - a_{11})$, tal que reemplazando en la segunda tenemos $(v_2 a_{21} + \ell_1) a_{12}/(1 - a_{11}) + v_2 a_{22} + \ell_2 = v_2$, entonces

$$v_1 = \frac{(1 - a_{22})\ell_1 + \ell_2 a_{21}}{(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{21} a_{12}},$$

$$v_2 = \frac{(1 - a_{11})\ell_2 + \ell_1 a_{12}}{(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{21} a_{12}}.$$

Consideremos los valores relativos, $v_2/v_1 = \frac{(1-a_{11})\ell_2 + \ell_1 a_{12}}{(1-a_{22})\ell_1 + \ell_2 a_{21}}$. Entonces, $v_2/v_1 >< 1$ si $\frac{\ell_2}{\ell_1} >< \frac{(1-a_{22}) - a_{12}}{(1-a_{11}) - a_{21}}$. En otras palabras, los valores dependen del trabajo efectivamente necesario en cada proceso, y de lo que entre como insumo a través de la otra mercancía.

Al igual que Ricardo, Marx asume un salario de subsistencia dado. Éste salario de subsistencia es en realidad determinado por las condiciones sociales de producción, y no tiene que considerarse como una necesidad biológica, sino más bien como el mínimo necesario para la manutención social de la fuerza de trabajo, o dicho en otros términos, la reproducción de la fuerza de trabajo. Supongamos que el salario real está compuesto de $\boldsymbol{d} = [d_1 \ d_2]'$ tal que podemos reescribir el modelo de dos mercancías como

$$\begin{aligned}
(a_{11} + d_1 \ell_1) \oplus (a_{21} + d_2 \ell_1) &\Rightarrow 1 \\
(a_{12} + d_1 \ell_2) \oplus (a_{22} + d_2 \ell_2) &\Rightarrow 1
\end{aligned}$$

Notar que este sistema da lugar a una nueva matriz de insumo producto aumentada

$$\boldsymbol{A}^+ = \begin{bmatrix} (a_{11} + d_1 \ell_1) & (a_{12} + d_1 \ell_2) \\ (a_{21} + d_2 \ell_1) & (a_{22} + d_2 \ell_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^+ & a_{12}^+ \\ a_{21}^+ & a_{22}^+ \end{bmatrix}.$$

A partir de $\boldsymbol{A}^+$ podemos calcular una nueva tasa de ganancia máxima R^+ y precios $(\boldsymbol{p}^+)$ usando las fórmulas del sistema sraffiano. Notar que este sistema vuelve a considearse como de producción de mercancías por medio de mercancías.

Definamos $\boldsymbol{vd}$ como el **valor de la fuerza de trabajo**, es decir, el valor de la mercancía trabajo. En este caso tenemos $v_1d_1 + v_2d_2$. Definamos ahora $\boldsymbol{vd} = \delta$ donde $\delta \leq 1$. Es decir, los trabajadores reciben una porción δ menor al valor producido por ellos. El resto, $(1 - \delta)$ es trabajo no pagado. Marx llama a $\sigma = \frac{1-\delta}{\delta}$ a la **tasa de plusvalía**. Si queremos obtener la tasa de plusvalía en el modelo de dos mercancías, notemos que $1 = (1 + \sigma)\boldsymbol{vd}$, entonces, $\sigma = (\boldsymbol{vd})^{-1} - 1 = (v_1d_1 + v_2d_2)^{-1} - 1$. La tasa de plusvalía se relaciona inversamente con los componentes del salario.

6.2.2. Valor trabajo en el modelo de n mercancías

Consideremos ahora el modelo general de n mercancías. Los **valores trabajo** (llamados también coeficientes de trabajo verticalmente integrados) se obtienen como

$$\boldsymbol{vA} + \boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{v}, \Rightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}.$$

Si $\boldsymbol{A}$ es productiva, entonces los valores son positivos.

Definamos $\boldsymbol{d} = [0 \ \dots \ 0 \ d_1 \ d_2 \ \dots d_h]'$ como el vector de h mercancías que entran en la canasta del salario real. El salario nominal se puede definir implícitamente como $w = \boldsymbol{pd}$.

La misma solución del vector de valores $\boldsymbol{v}$ se puede obtener si agregamos la ecuación $(1 + \sigma)\boldsymbol{vd} = 1$. Otra forma de ver el modelo es entonces,

$$\boldsymbol{vA} + (1 + \sigma)\boldsymbol{vd\ell} = \boldsymbol{vA} + \boldsymbol{vd\ell} + \sigma\boldsymbol{vd} = \boldsymbol{v}. \tag{6.1}$$

Esta ecuación es fundamental en el sistema marxiano. El valor de cada mercancía se compone de el valor incorporado en los medios de producción, el valor de la fuerza de trabajo y la plusvalía.

En términos marxistas podemos escribir el sistema agregado como

$$\boldsymbol{vx} = \boldsymbol{vAx} + \boldsymbol{vd\ell x} + \sigma \boldsymbol{vd\ell x},$$

donde $VALOR\ TOTAL = c + b + s$, donde c : capital constante, b : capital variable y s : plusvalía. s/b es la tasa de plusvalía; $\phi = s/(c+b)$ se define como la tasa de beneficios en valores. Cabe destacar que todos estos factores son agregados, y dependen del vector de producto bruto $\boldsymbol{x}$.

La condición necesaria para la existencia de una solución que no sea cero es

$$det\,[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} - (1+\sigma)\boldsymbol{d\ell}] = 0.$$

Si resolvemos para σ podemos entonces obtener los valores conjuntamento con la tasa de plusvalía. La matriz $\boldsymbol{d\ell}$ es el producto de dos vectores, entonces tiene rango 1 (máximo un vector linealmente dependiente), así σ tiene como máximo una sola solución no cero. Por otro lado podemos escribir,

$$det\left[\boldsymbol{I} - (1+\sigma)\boldsymbol{d\ell}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\right] = 0.$$

$\boldsymbol{d\ell}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$ se define como los coeficientes verticalmente integrados de consumo de subsistencia.

6.2.3. Precios de producción en el modelo marxista

En el modelo marxista estándar, al igual que en los modelos ricardinos, el salario viene dado por una canasta de subsistencia, tal que

$$w = \boldsymbol{pd}. \tag{6.2}$$

Luego vamos a ver que este supuesto en realidad no es necesario.

El sistema en precios de producción es

$$(\boldsymbol{p}^{+}\boldsymbol{A} + w\boldsymbol{\ell})(1+r) = \boldsymbol{p}^{+}, \tag{6.3}$$

y despejando,

$$\Rightarrow \boldsymbol{p}^{+}[\boldsymbol{I} - (1+r)(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{d\ell})] = \boldsymbol{0}. \tag{6.4}$$

Este modelo es similar al modelo sraffiano usado en Cap. 3. Notar que $w^M(1+r) = w^S$, donde w^M es el salario en el modelo marxista (el salario se paga antes de la producción por adelantado, la ganancia se aplica a todo el capital invertido, incluyendo el fondo de salarios) y w^S es el salario en el modelo sraffiano (el salario se paga luego de la producción y es parte de la distribución del excedente). No hay diferencias entre uno u otro modelo. Sin embargo, usando esta especificación aparece claramente el rol del capital, como ente que recibe una tasa sobre lo invertido, mientras que se le da un rol más pasivo a los trabajadores, donde parecciera que no reciben parte del excedente sino que todo el excedente iría a los capitalistas.

El hecho de considerar el salario como parte de la masa de capital tiene que ver con la interpretación marxista acerca de cómo funciona el capitalismo. Y también, contribuye a entender por qué la ganancia del capitalista se disocia de la plusvalía. La siguiente cita clarifica esta interpretación:

> "Por lo que al capitalista individual se refiere, es evidente que lo único que a él le interesa es la relación entre la plusvalía o el remanente de valor que deja el precio de venta de sus mercancías y el capital total desembolsado para producirlas; en cambio, le tiene sin cuidado la relación que pueda existir entre este remanente y sus conexiones internas con los elementos concretos del capital. Lejos de ello, lo que le interesa es que esta relación y estas conexiones internas queden a la sombra" Marx (1894, pp.58-59)

Foley también lo expresa claramente:

> "El capital mismo aparece ser la causa y el regulados del volumen de los beneficios: aquellos que tienen mucho capital obtienen proporcionalmente una mayor proporción del plusvalor." (Foley, 1986, p.104)

Definamos la matriz $\boldsymbol{A}^+ = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{d\ell})$ como la matriz de coeficientes interindustriales "aumentada" para tener el consumo de los trabajadores. Entonces,

$$\boldsymbol{p}^+[\boldsymbol{I} - (1+r)\boldsymbol{A}^+] = \boldsymbol{0}. \tag{6.5}$$

Esto da lugar a las mismas condiciones que en el sistema sraffiano, tal que la solución debe satisfacer $det[\boldsymbol{I} - (1+r)\boldsymbol{A}^+] = 0$, y existe $\lambda_m^+ \leq 1$ que implica $R^+ \geq 0$. Notar que $R^+ \leq R$ porque $\boldsymbol{A}^+ \geq \boldsymbol{A}$.

6.3. Teorema fundamental marxiano

Uno de los puntos centrales de la economía marxista es que no hay beneficios sin explotación. En otras palabras, si hay ganancia, renta u otra forma de beneficio producto del sistema capitalista, ésta se asocia a que los trabajadores no recibieron el producto completo de su trabajo.

Notemos que podemos escribir los dos modelos, en valores y en precios de producción, usando sus ecuaciones características como

$$det\left(\frac{1}{1+\sigma}\boldsymbol{I} - \left(\frac{1}{1+\sigma}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{d\ell}\right)\right) = 0,$$

$$det\left(\frac{1}{1+r}\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{d\ell})\right) = 0.$$

Los dos modelos coinciden cuando $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ (no hay capital constante). Por otro lado, $\sigma = 0$ implica que $r = 0$. Morishima (1973) llama a esta relación el **Teorema Fundamental Marxiano**: no hay ganancia sin explotación (o plusvalía).

Ahora para el caso general, $\sigma > 0$, tenemos que $\frac{1}{1+\sigma}\boldsymbol{A} < \boldsymbol{A}$, entonces también implica que $\frac{1}{1+\sigma} < \frac{1}{1+r}$, o $\sigma > r$. La razón es que la solución λ_m^+ es decreciente en todos los elementos de $\boldsymbol{A}^+$.

Otra forma de ver este resultado es el siguiente.[2] Si nosotros tenemos que $w = \boldsymbol{p}^+\boldsymbol{d}$ y que $\sum_i \ell_i = 1$, entonces

$$\boldsymbol{p}^+ = (1+r)[\boldsymbol{pA}+w\boldsymbol{\ell}] \Rightarrow \boldsymbol{p}^+[\boldsymbol{I}-(1+r)\boldsymbol{A}] = (1+r)w\boldsymbol{\ell} \Rightarrow \boldsymbol{p}^+ = w(1+r)\ell[\boldsymbol{I}-(1+r)\boldsymbol{A}]^{-1}$$

Multiplicando ambos lados de la igualdad por $\boldsymbol{d}$,

$$w = \boldsymbol{p}^+\boldsymbol{d} = w(1+r)\boldsymbol{\ell}[\boldsymbol{I}-(1+r)\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{d} \Rightarrow 1 = (1+r)\boldsymbol{\ell}[\boldsymbol{I}-(1+r)\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{d}.$$

El lado derecho de la igualdad es creciente en r y tiende a infinito cuando $r \to R$. Entonces tiene que darse que $1 > \boldsymbol{\ell}[\boldsymbol{I}-(1+r)\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{d}$ para que haya una $r > 0$.

Ahora $b = \boldsymbol{vd} = \boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{d}$ y $s = 1 - b = 1 - \boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{d}$ donde 1 es el valor total que se produce en una economía. Entonces $s > 0$ si y solo si $1 > \boldsymbol{\ell}[\boldsymbol{I}-(1+r)\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{d}$.

Definamos ahora a las industrias como industrias de tipo I (bienes de capital, en total $n-h$) y de tipo II (bienes de consumo, en total h):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_I &= \boldsymbol{v}_I\boldsymbol{A}_I + \boldsymbol{\ell}_I \\ \boldsymbol{v}_{II} &= \boldsymbol{v}_I\boldsymbol{A}_{II} + \boldsymbol{\ell}_{II} \end{aligned}$$

El valor de las cesta de consumo es $\boldsymbol{v}_{II}\boldsymbol{d} = [0_{n-h} \ \ \boldsymbol{\ell}_{II}](\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{d}$. Definamos nuevamente $\sigma = \frac{1-\boldsymbol{v}_{II}\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{v}_{II}\boldsymbol{d}}$ como la **tasa de explotación o plusvalía**. $\boldsymbol{v}_{II}\boldsymbol{d}$ lo podemos llamar el trabajo necesario, y $1-\boldsymbol{v}_{II}\boldsymbol{d}$ el plusvalor. Usando $(1+\sigma)\boldsymbol{v}_{II}\boldsymbol{d} = 1$, tenemos

[2] Aquí se sigue a Steedman (1977).

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_I &= \boldsymbol{v}_I \boldsymbol{A}_I + (1+\sigma)\boldsymbol{v}_{II} \boldsymbol{d\ell}_I \\
\boldsymbol{v}_{II} &= \boldsymbol{v}_I \boldsymbol{A}_{II} + (1+\sigma)\boldsymbol{v}_{II} \boldsymbol{d\ell}_{II}
\end{aligned}$$

No hay beneficios sin explotación. $r > 0 \Rightarrow \sigma > 0$

Si cada industria tiene beneficios positivos, entonces

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p}_I^+ &> \boldsymbol{p}_I^+ \boldsymbol{A}_I + w\boldsymbol{\ell}_I \\
\boldsymbol{p}_{II}^+ &> \boldsymbol{p}_{II}^+ \boldsymbol{A}_{II} + w\boldsymbol{\ell}_{II}
\end{aligned}$$

Probemos primero, que la explotación es la fuente de beneficio.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p}_I^+ &> \boldsymbol{p}_I^+ \boldsymbol{A}_I + \boldsymbol{p}_{II}^+ \boldsymbol{d\ell}_I \\
\boldsymbol{p}_{II}^+ &> \boldsymbol{p}_{II}^+ \boldsymbol{A}_{II} + \boldsymbol{p}_{II}^+ \boldsymbol{d\ell}_{II}
\end{aligned}$$

Definamos la matriz de insumos y insumos de trabajo como $\boldsymbol{A}^+ = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_I & \boldsymbol{A}_{II} \\ \boldsymbol{d\ell}_I & \boldsymbol{d\ell}_{II} \end{bmatrix}$. Dado que $\boldsymbol{p}_I^+ > 0$ y $\boldsymbol{p}_{II}^+ > 0$, entonces $\boldsymbol{A}^+$ es productiva, existen vectores $\boldsymbol{x}_I$ y $\boldsymbol{x}_{II}$ de productos tal que

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_I \\ \boldsymbol{x}_{II} \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_I & \boldsymbol{A}_{II} \\ \boldsymbol{d\ell}_I & \boldsymbol{d\ell}_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_I \\ \boldsymbol{x}_{II} \end{bmatrix}.$$

Si multiplicamos por el vector positivo $\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{v}_I \;\; \boldsymbol{v}_{II}]$ tenemos

$$(\boldsymbol{v}_I \boldsymbol{x}_I + \boldsymbol{v}_{II} \boldsymbol{x}_{II}) - \boldsymbol{v}_I(\boldsymbol{A}_I \boldsymbol{x}_I + \boldsymbol{A}_{II} \boldsymbol{x}_{II}) - \boldsymbol{v}_{II}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{d\ell}_I \boldsymbol{x}_I + \boldsymbol{d\ell}_{II} \boldsymbol{x}_{II})$$

$$= \sigma \boldsymbol{v}_{II}(\boldsymbol{d\ell}_I \boldsymbol{x}_I + \boldsymbol{d\ell}_{II} \boldsymbol{x}_{II}) > 0$$

No hay explotación sin beneficios. $\sigma > 0 \Rightarrow r > 0$

Si $\sigma > 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_I &> \boldsymbol{v}_I \boldsymbol{A}_I + \boldsymbol{v}_{II} \boldsymbol{d}\boldsymbol{\ell}_I \\ \boldsymbol{v}_{II} &> \boldsymbol{v}_I A_{II} + \boldsymbol{v}_{II} \boldsymbol{d}\boldsymbol{\ell}_{II} \end{aligned}$$

Ahora pongamos $\boldsymbol{p}_I = \alpha \boldsymbol{v}_I$, $\boldsymbol{p}_{II} = \alpha \boldsymbol{v}_{II}$, para cualquier $\alpha > 0$, y $w = \alpha \boldsymbol{v}_{II} \boldsymbol{d}$. Entonces todas las industrias tienen beneficios a estos precios.

Explotación y beneficios: $r \leq \sigma$

Exploremos la relación entre beneficios y explotación. Empezamos de,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_I &= \boldsymbol{v}_I \boldsymbol{A}_I + (1+\sigma) \boldsymbol{v}_{II} \boldsymbol{d}\boldsymbol{\ell}_I \\ \boldsymbol{v}_{II} &= \boldsymbol{v}_I \boldsymbol{A}_{II} + (1+\sigma) \boldsymbol{v}_{II} \boldsymbol{d}\boldsymbol{\ell}_{II} \end{aligned}$$

Sumemos $\sigma \boldsymbol{v}_I \boldsymbol{A}_I$ y $\sigma \boldsymbol{v}_I \boldsymbol{A}_{II}$ a la primera y segunda ecuación respectivamente,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_I &< (1+\sigma)[\boldsymbol{v}_I \boldsymbol{A}_I + \boldsymbol{v}_{II} \boldsymbol{d}\boldsymbol{\ell}_I] \\ \boldsymbol{v}_{II} &< (1+\sigma)[\boldsymbol{v}_I \boldsymbol{A}_{II} + \boldsymbol{v}_{II} \boldsymbol{d}\boldsymbol{\ell}_{II}] \end{aligned}$$

Recordando la definición de $\boldsymbol{A}^+$, entonces

$$\boldsymbol{v} < (1+\sigma) \boldsymbol{v} \boldsymbol{A}^+$$

. Se puede probar que **no** existe un vector $\boldsymbol{x}$ (no negativo, no cero) tal que $f \geq \sigma$ y

$$\boldsymbol{x} = (1+f) \boldsymbol{A}^+ \boldsymbol{x},$$

porque si existiera entonces $\boldsymbol{v}\boldsymbol{x} < (1+\sigma) \boldsymbol{v} \boldsymbol{A}^+ \boldsymbol{x} \leq (1+f) \boldsymbol{v} \boldsymbol{A}^+ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}\boldsymbol{x}$

(contradicción). Ahora usando el resultado $w = \boldsymbol{p}^+_{II}\boldsymbol{d}$, tenemos que $\boldsymbol{p}^+ = (1+r)\boldsymbol{p}^+\boldsymbol{A}^+$. Del resultado anterior tenemos que tiene que cumplirse que $r < \sigma$, dado que sino podríamos elegir un $\boldsymbol{x}$ que cumpla esa igualdad.

6.4. Tasa de beneficios en valores

Definamos (c_i, b_i, s_i) $i = 1, \ldots, n$ como las composiciones sectoriales de valor constante, variable y plusvalía, y $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{s})$ como los vectores de todos los sectores. Definamos $\phi(\boldsymbol{x})$ como la tasa de beneficios en valores:

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \sigma\frac{\boldsymbol{bx}}{\boldsymbol{cx}+\boldsymbol{bx}} = \sigma\frac{1}{\boldsymbol{cx}/\boldsymbol{bx}+1},$$

donde $\gamma = c/b = \boldsymbol{cx}/\boldsymbol{bx}$ es la *composición orgánica* del capital. Notar que a mayor composición orgánica, menores beneficios, dada la tasa de explotación fija. Ésta relación juega un rol central en el análisis marxista porque se asocia al desarrollo capitalista como un aumento de la composición orgánica, es decir, mayor mecanización y uso intensivo del capital constante vis-à-vis capital variable. Como consecuencia, si el progreso tecnológico está asociado a una mayor composición orgánica del capital, la tasa de beneficio, medida en valores, cae.

Definamos la tasa de beneficios en valores del sector i, $\phi_i = \frac{s_i}{c_i+b_i} = \frac{\sigma}{c_i/b_i+1} = \frac{\sigma}{\gamma_i+1}$, donde $\gamma_i = c_i/b_i$ es la composición orgánica sectorial donde $c_i = \boldsymbol{vA}_{\cdot i}$ y $b_i = \boldsymbol{vd}\ell_i$.

Se puede probar que la tasa agregada de beneficios es la media harmónica de las de cada sector, $\phi(\boldsymbol{x}) = \left(\sum_i \alpha_i\phi_i^{-1}\right)^{-1}$, donde $\alpha_i = \frac{\ell_i x_i}{\boldsymbol{\ell x}}$.[3] Por otro lado la tasa de ganancia en precios es $r = \left(\sum_i \alpha_i^*\phi_i^{-1}\right)^{-1}$ donde $\alpha_i^* = \frac{\ell_i x_i^*}{\boldsymbol{\ell x}^*}$ y $\boldsymbol{x}^*$ es el vector (derecho) asociado a $\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{x}^* = \lambda_m\boldsymbol{x}^*$.[4] Cabe destacar que aunque la tasa en valores depende de la distribución y niveles de producción entre

[3]Ver Roemer (1981, Teorema 4.1, p.93).

[4]Ver Roemer (1981, Corolario 4.2, pp.93-94).

sectores, la tasa en precios no depende. De hecho ambas tasas coinciden en el caso particular de $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*$, que es de hecho la llamada mercancía estándar en Sraffa (ver Cap. 4).

Proposición 6.4.1. *Si la composición orgánica es uniforme,* $\phi_{min} = r = \phi_{max}$.

Prueba: De la ecuación $\boldsymbol{p}^+ = (1+r)\boldsymbol{p}\boldsymbol{A}^+$, tenemos que dado que $\boldsymbol{p} \gg 0$, $(1+r) > 0$, entonces para cualquier vector $\boldsymbol{x} \gg 0$, $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x} = (1+r)\boldsymbol{p}\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{x}$.

Por otro lado, $\boldsymbol{v}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{x} + \sigma(\boldsymbol{v}_{II}\boldsymbol{d})\boldsymbol{\ell}\boldsymbol{x}$. En este caso, $\phi = \phi_i = \frac{s_i}{c_i+b_i}$ para todo i. Tenemos entonces, $\sigma\boldsymbol{v}\boldsymbol{d}\boldsymbol{\ell}x_i = \phi_i(\boldsymbol{v}\boldsymbol{A}^+x_i)$. Sumando todos los sectores, $\boldsymbol{v}\boldsymbol{x} = (1+\phi)\boldsymbol{v}\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{x}$. Como esto se cumple para todo $\boldsymbol{x} \gg 0$, $\boldsymbol{v} = (1+\phi)\boldsymbol{v}\boldsymbol{A}^+$, que tiene la misma forma del vector de precios. Entonces, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}$ y $\phi = r$. *QED*

En general, $\phi_{min} < r < \phi_{max}$ (Roemer, 1981, Teorema 4.3, p.95). Al igual que en el TFM hay una relación fundamental entre la tasa de ganancia en precios y en valores. En el TFM la relación aparecía como determinada por la tasa de plusvalía, que afecta directamente la tasa de beneficios en valores. Aquí la relación es explícita en términos de las tasas de ganancia.

6.5. La tendencia a la caída de la tasa de ganancia

Como fuera derivado anteriormente, la tasa de ganancia en valores se puede expresar como

$$\phi = \frac{\sigma}{\gamma + 1},$$

donde $\sigma = s/b$ es la tasa de plusvalía y $\gamma = c/b$ la composición orgánica, ambas en valores y an términos agregados. Se sigue en forma mecánica que la tasa de ganancia aumenta a mayor σ y a menor γ. La tendencia a la caída de la tasa de ganancia tiene que ver con un aumento progresivo de γ juntamente con el desarrollo capitalista. Es decir, la búsqueda incesante de nuevas tecnologías para lograr aumentar los beneficios (algo inherente al sistema capitalista), que por otra parte tiene como correlato un aumento de la composición orgánica, produce como consecuencia inesperada una caída de la tasa de ganancia.

El mismo Marx resalta, sin embargo, que existen numerosas causas que se contraponen a esta relación. De hecho tampoco debemos considerar que los dos elementos constitutivos no cambian simultáneamente, como es discutido en Sweezy (1942). Así tenemos que si diferenciamos totalmente la tasa de ganancia,

$$d\phi = \frac{1}{\gamma+1}d\sigma - \frac{\sigma}{(\gamma+1)^2}d\gamma,$$

por lo que

$$d\phi >< 0,\ si\ y\ solo\ si\ \frac{d\sigma}{d\gamma} >< \phi.$$

La anterior relación establece que la tasa de ganancia aumenta si el cambio tecnológico hace que la plusvalía aumente en una proporción mayor a ϕ que la composición orgánica.

6.6. Cambio tecnológico en el modelo marxista

Dado que los capitalistas solo se preocupan por la tasa de ganancia en precios, esta tendencia es discutida desde el modelo sraffiano, y se concluye que en general no hay una relación causal que haga que el cambio tecnológico produzca una caída de la tasa de ganancia. Para ello debemos analizar distintos tipos de cambios tecnológicos.

Si el cambio tecnológico es tal que $\boldsymbol{A}^*_{\cdot j} \geq \boldsymbol{A}_{\cdot j}$ y $\ell^*_j \leq \ell_j$, $\forall j$, lo que implica

$\boldsymbol{A}^{+*} \leq \boldsymbol{A}^{+}$, entonces la tasa de beneficios se incrementa, $r^* > r$. Éste análisis se puede probar con un simple ejercicio de estática comparada (ej. ver Cáp. 2), dado que la raíz de Perron-Frobenius es decreciente en los elementos de $\boldsymbol{A}^{+}$. Sin embargo, es difícil establecer la dirección en general.

Dado que r está contenido en el rango de variación de las tasas de ganancias en valores ($\phi_{min} \leq r \leq \phi_{max}$), distintos tipos de cambio tecnológicos que mueven todo el intervalo de estas últimas va a afectar en una dirección determinada la ganancia, pero tampoco podemos establecer reglas generales si r está igualmente contenida antes y después del cambio tecnológico.

Si el cambio técnico es tal que reduce los costos con los precios actuales, entonces la tasa de beneficios se incrementa. Se llama este cambio tecnológico **viable** e implica que $\boldsymbol{p}^*\boldsymbol{A}^* + \boldsymbol{\ell}^* \leq \boldsymbol{pA} + \boldsymbol{\ell}$. Esto se conoce como el Teorema de Okishio (1961) y es una aplicación del análisis de elección de técnica en el modelo sraffiano (Cap. 5). Básicamente este teorema dice que si hay una técnica que se elige para reducir los costos, para un nivel dado de tasa de ganancia, entonces la tasa de ganancia no puede caer.

Prueba: Basado en Roemer (1981, Teorema 4.6, p.97). Usemos $\boldsymbol{pA}^{+} = \lambda \boldsymbol{p}$ donde $\lambda = (1+r)^{-1}$. Entonces, para cada columna de $\boldsymbol{A}^{+}$, $\frac{\boldsymbol{pA}^{+}_{\cdot i}}{p_i} = \lambda$.

Definamos que una tecnología reduce los costos si, $\frac{\boldsymbol{pA}^{+*}_{\cdot i}}{p_i} < \lambda$.[5] Por propiedades de $\boldsymbol{A}^{+*}$, $min_i \ \frac{\boldsymbol{p}^*\boldsymbol{A}^{+*}_{\cdot i}}{p^*_i} = \lambda^* = max_i \ \frac{\boldsymbol{p}^*\boldsymbol{A}^{+*}_{\cdot i}}{p^*_i}$, si $\boldsymbol{p}^*$ es un autovalor asociado a λ^*, sino $min_i \ \frac{\boldsymbol{pA}^{+*}_{\cdot i}}{p_i} < \lambda^* < max_i \ \frac{\boldsymbol{pA}^{+*}_{\cdot i}}{p_i}$, para cualquier otro $\boldsymbol{p} > 0$. Entonces,

$$\frac{\boldsymbol{p}^*\boldsymbol{A}^{+*}_{\cdot i}}{p^*_i} = \lambda^* < max_i \ \frac{\boldsymbol{pA}^{+*}_{\cdot i}}{p_i} < \lambda, \ r^* > r \ QED$$

[5]Esto significa que a los precios antiguos, con la nueva técnica se obtiene una mayor ganancia, $(1+r)\boldsymbol{pA}^{+*}_{\cdot i} < p_i$.

Capítulo 7

Teoría marxista (ii)

7.1. Introducción

EL modelo marxista estudia el capitalismo a partir de variables expresadas en valores-trabajo. Así, la tasa de plusvalía es una variable central para regular la tasa de ganancia, y de ahí, el crecimiento, las crisis, etc., tienen su explicación en lo que pasa en valores. Como vimos en el capítulo anterior, la tasa de ganancia está íntimamente asociada a la de plusvalía. Éste capítulo va más allá y estudia que relación analítica encontramos entre los valores y los precios de producción.

El **problema de la transformación** de valores a precios se refiere a la imposibilidad de expresar fenómenos en precios a partir de usar únicamente los valores. En el proceso de "transformar" (igualar, asignar) los valores a los precios se producen ciertas **imposibilidades**. En este capítulo se le da especial importancia al álgebra asociada con este análisis.

7.2. El problema de la transformación de valores en precios

Notemos que en general $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{p}$. Es decir, los precios de producción no coinciden con los valores con lo cual los salarios y las tasas de ganancia no necesariamente están determinados por lo que pasa al nivel de los valores. Esto no sería un problema si no tuviera asociado otras desigualdades. En particular, lo que más nos interesa es que, como fuera mencionado en el Cap. 6, la tasa de ganancia calculada en precios (r) no coincide con la calculada en valores (ϕ). Así, el modelo en valores aparece como redundante (ver más abajo la crítica neoricardiana).

El problema de la transformación se refiere al proceso por el cual se pueden obtener los precios de producción por los valores. Es un problema porque hay ciertas igualdades agregadas que no se pueden cumplir simultáneamente, excepto en casos particulares. Las igualdades o relaciones de invariancia (usando la terminología de Seton (1957)) de interés son:

1. $\boldsymbol{vx} = \boldsymbol{px}$: la suma de valores agregados es igual a la suma de precios agregadas.

2. $\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{\sigma \boldsymbol{v d \ell x}}{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{d\ell})\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{d\ell})\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{d\ell})\boldsymbol{x}} = r$: la tasa de ganancia en valores es igual a la tasa de ganancia en precios.

3. $\sigma \boldsymbol{v d \ell x} = r\boldsymbol{p}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{d\ell})\boldsymbol{x}$: la masa de plusvalía no es igual a la masa de beneficios en precios.

Un caso particular es el de la composición orgánica uniforme del capital . Si tenemos que $\gamma_i = \gamma$, entonces $\frac{\sigma \boldsymbol{v d\ell x}}{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{d\ell})\boldsymbol{x}} = \frac{\sigma \boldsymbol{v d\ell x}}{(1+\gamma)\boldsymbol{v d\ell x}} = \frac{\sigma \boldsymbol{bx}}{(1+\gamma)\boldsymbol{bx}} = \frac{\sigma}{1+\gamma}$. Se puede probar que en este caso, $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{v}$ (ver Proposición 6.4.1) tal que las 3 igualdades se cumplen.

Una forma interesante de analizar este problema es el siguiente. Ésta forma de encarar el sistema económico es el usado por Marx originariamente, y sobre el cual se desarrolló todo el debate posterior. Supongamos un sistema económico con 3 sectores: sector 1 (medios de producción), sector 2 (bienes de la canasta del salario) y sector 3 (bienes de lujo o suntuarios). Supongamos también la reproducción simple en valores.

$$\left.\begin{array}{rcl} c_1 + b_1 + s_1 & = & c_1 + c_2 + c_3 \\ c_2 + b_2 + s_2 & = & b_1 + b_2 + b_3 \\ c_3 + b_3 + s_3 & = & s_1 + s_2 + s_3 \end{array}\right\}$$

Marx asume que $\sigma = \frac{s_1}{b_1} = \frac{s_2}{b_2} = \frac{s_3}{b_3}$, la tasa de plusvalía es la misma en todos los sectores. La tasa de plusvalía no puede determinar los beneficios porque hay movilidad del capital. Definamos $\phi_i = \frac{s_i}{c_i + b_i}$, $i = 1, 2, 3$ como las tasas de beneficios en valores, y $\gamma_i = \frac{c_i}{b_i}$, $i = 1, 2, 3$ como la composición orgánica. Si $\gamma_i \neq \gamma_j$ y las ganancias se determinan de acuerdo a las tasas de ganancia en valores, los beneficios serán diferentes entre sectores. Esto no se puede sostener con movilidad del capital. Como se discute más abajo estas discrepancias están asociadas a movimientos de capitales de una manera muy similar a lo que ocurre en el modelo sraffiano, donde se asume un largo plazo que logra la uniformidad de la tasa de ganancia. Cualquiera sea este proceso, en el modelo marxista se asume que

$$\phi = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{c_1 + c_2 + c_3 + b_1 + b_2 + b_3}$$

Pero la tasa de ganancia que cuenta es la observada en precios, no en valores. El problema de la transformación es encontrar (p_1, p_2, p_3, r) tal que

$$\left.\begin{array}{rcl} (p_1 c_1 + p_2 b_1)(1 + r) & = & p_1(c_1 + c_2 + c_3) \\ (p_1 c_2 + p_2 b_2)(1 + r) & = & p_2(b_1 + b_2 + b_3) \\ (p_1 c_3 + p_2 b_3)(1 + r) & = & p_3(s_1 + s_2 + s_3) \end{array}\right\}$$

La solución la encontró un economista ruso Bortkiewicz (hecha conocida por

Sweezy (1942, cap.7); ver también ,(Meek, 1956, cap. 5)).

$$r = \frac{f_2 g_1 + g_2 - \sqrt{(f_2 g_1 - g_2)^2 + 4 f_1 g_1 g_2}}{2(f_2 - f_1)} - 1$$

$$p_3 = 1, \; p_2 = \frac{g_3}{g_2 + (f_3 - f_2)(1+r)}, \; p_1 = \frac{f_1 p_2 (1+r)}{g_1 - (1+r)}$$

donde $f_i = b_i/c_i$, $g_i = \frac{c_i+b_i+s_i}{c_i}$, $i = 1, 2, 3$. La solución propuesta no puede satisfacer las igualdades predichas por Marx. Notar también que r no depende del departamento 3, es decir, del consumo de los capitalistas. Si $f = f_i$, la solución es $p_i = 1$, $i = 1, 2, 3$, $r = \phi$. Es decir, los valores son iguales a los precios.

Para ilustrar este problema seguimos los ejemplos desarrollados en Sweezy (1942). Supongamos el siguiente modelo:

Modelo en valores

Dept.	c	b	s	v	s/b	$c/(c+b)$	$s/(c+b)$
I	250	75	75	400	100 %	77 %	23 %
II	50	75	75	200	100 %	40 %	60 %
III	100	50	50	200	100 %	$66\frac{2}{3}$ %	$33\frac{1}{2}$ %
Total	400	200	200	800	100 %	$66\frac{2}{3}$ %	$33\frac{1}{3}$ %

Modelo en precios (de acuerdo a Marx, asumiendo $r = \phi = 33\frac{1}{3}$ %)

Dept.	c	b	s	v	$r(c+b)$	$(c+b)(1+r)$
I	250	75	75	400	$108\frac{1}{3}$	$433\frac{1}{3}$
II	50	75	75	200	$41\frac{2}{3}$	$166\frac{2}{3}$
III	100	50	50	200	50	200
Total	400	200	200	800	200	800

Modelo en precios (de acuerdo a Bortkiewicz)

Dept.	p_1c	p_2b	$r(p_1c+p_2b)$	$(p_1c+p_2b)(1+r)$
I	$281\frac{1}{4}$	$56\frac{1}{4}$	$112\frac{1}{2}$	450
II	$56\frac{1}{4}$	$56\frac{1}{4}$	$37\frac{1}{2}$	150
III	$112\frac{1}{2}$	$37\frac{1}{2}$	50	200
Total	450	150	200	800

Usando las fórmulas de arriba, $p_1 = \frac{9}{8}$, $p_2 = \frac{3}{4}$ y $r = 33\frac{1}{3}\,\%$. Este ejemplo da la imagen de igualdad de valores y precios de todos los elementos agregados. Pero esta igualdad es ilusoria.

Supongamos otro ejemplo:

Modelo en valores

Dept.	c	b	s	v
I	225	90	60	375
II	100	120	80	300
III	50	90	60	200
Total	375	300	200	875

Modelo en precios (Bortkiewicz)

Dept.	p_1c	p_2b	$r(p_1c+p_2b)$	$(p_1c+p_2b)(1+r)$
I	288	96	96	480
II	100	120	80	320
III	64	96	40	200
Total	480	320	200	1000

Para este modelo $\phi = 200/(375+300)$ pero $r = 200/(480+320)$. ¿De qué depende? De la relación entre la composición orgánica en el dept. 3 al total. Si son iguales van a coincidir en tasa de beneficio y totales. Si dept. 3 tiene menos que el total $(50/90 < 375/300)$ entonces $r < \phi$ (y viceversa).

Una condición necesaria para la igualdad de la tasa de ganancia en valores y precios es que los precios sean proporcionales a los valores. Estudiemos en qué casos se da esta proporcionalidad.

Los siguientes resultados se deben a Morishima (1989, pp.23-24).

Proposición 7.2.1. *Si los ratios de capital y trabajo son uniformes en todos los sectores,* $\boldsymbol{p}\boldsymbol{A}_{\cdot i}/\ell_i = k$*,* $\forall i$*, entonces los precios son proporcionales a los valores,* $\boldsymbol{p} = \beta\boldsymbol{v}$*, para* $\beta > 0$*.*

Prueba: Definamos $\beta = (1+r)\boldsymbol{p}\boldsymbol{d} + rk$. Multiplicando por $\boldsymbol{\ell}$, $\beta\boldsymbol{\ell} = (1+r)\boldsymbol{p}\boldsymbol{d}\boldsymbol{\ell} + rk\boldsymbol{\ell} = (1+r)w\boldsymbol{\ell} + r\boldsymbol{p}\boldsymbol{A}$. Sumando ahora $\boldsymbol{p}\boldsymbol{A}$ a ambos lados de la igualdad,

$$\beta\boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{p}\boldsymbol{A} = (1+r)(w\boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{p}\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{p}.$$

Entonces, $\boldsymbol{p} = \beta\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \beta\boldsymbol{v}$. QED

Proposición 7.2.2. *Al revés también se cumple si* $r > 0$*. Supongamos que* $\boldsymbol{p} = \beta\boldsymbol{v}$*, entonces* $\boldsymbol{p}\boldsymbol{A}_{\cdot i}/\ell_i = k$*,* $\forall i$*.*

Prueba: De la ecuación de precios, $\boldsymbol{v} = (1+r)\boldsymbol{v}\boldsymbol{d}\boldsymbol{\ell} + (1+r)\boldsymbol{v}\boldsymbol{A}$. Entonces, usando la definición de valores, $\boldsymbol{\ell} = (1+r)\boldsymbol{v}\boldsymbol{d}\boldsymbol{\ell} + r\boldsymbol{v}\boldsymbol{A}$. Entonces, $\boldsymbol{\ell}\left[1 - (1+r)\boldsymbol{v}\boldsymbol{d}\right] = r\boldsymbol{v}\boldsymbol{A}$, con lo cual $\left[1 - (1+r)\boldsymbol{v}\boldsymbol{d}\right] > 0$ implica $r > 0$. Ahora definamos $\alpha = \left[1 - (1+r)\boldsymbol{v}\boldsymbol{d}\right]/r > 0$, tal que $\alpha\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{v}\boldsymbol{A}$, y multiplicando por β,

$$\alpha\beta\boldsymbol{\ell} = \beta\boldsymbol{v}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{p}\boldsymbol{A}.$$

Finalmente definiendo $k = \alpha\beta$ llegamos al resultado. QED

Nuti (1977) expresa las condiciones necesarias y suficientes para que los precios sean proporcionales a los valores.

Proposición 7.2.3. *Supongamos que* $\boldsymbol{\ell}\boldsymbol{A} = \lambda_m\boldsymbol{\ell}$*, es decir,* $\boldsymbol{v}$ *es un autovector asociado al mayor autovalor de* $\boldsymbol{A}$*. Entonces,* $\boldsymbol{p} \propto \boldsymbol{v}$*.*

Prueba: Usamos $w = 1$ como numerario. Entonces podemos expresar,

$$\boldsymbol{v} = \ell + \boldsymbol{vA} = \boldsymbol{\ell} + (\boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{vA})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{\ell A} + \boldsymbol{vA}^2 = (1+\lambda_m)\boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{vA}^2 = \frac{1}{1-\lambda_m}\ell = \frac{1+R}{R}\boldsymbol{\ell}.$$

Por otro lado,

$$(1+r)^{-1}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{\ell} + (1+r)(\boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{pA})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\ell} + (1+r)\boldsymbol{\ell A} + (1+r)\boldsymbol{pA}^2$$

$$= (1 + (1+r)\lambda_m)\ell + \boldsymbol{pA}^2 = \frac{1}{1-(1+r)\lambda_m}\boldsymbol{\ell} = \frac{1+R}{R-r}\boldsymbol{\ell},$$

entonces,

$$\boldsymbol{p} = \frac{(1+R)(1+r)}{R-r}\boldsymbol{\ell}.$$

Así tenemos que

$$\boldsymbol{p} = \frac{R(1+r)}{R-r}\boldsymbol{v}. \ QED$$

Notar que en este caso, la composición orgánica del capital es uniforme porque $\boldsymbol{vA} = \frac{1+R}{R}\boldsymbol{\ell A} = \frac{1}{R}\boldsymbol{\ell}$, lo que implica que $s/b = \frac{r(1+R)}{R-r}$. Como resultado todos los elementos en valores tienen una contraparte proporcional en precios.

7.3. Mercancía estándar en el modelo marxista

Consideremos la mercancía estándar sraffiana como *numéraire* dada por[1]

$$(\boldsymbol{I} - (1+R)\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{0}, \tag{7.1}$$

$$\boldsymbol{\ell x}^* = 1, \tag{7.2}$$

[1]Seguimos en esta Sección a Pasinetti (1977, Apéndice al Cap. 5) y Eatwell (1975).

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}^* = 1. \tag{7.3}$$

Planteamos el modelo marxista en ec. (6.3), tenemos

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{I}-(1+r)\boldsymbol{A}) = (1+r)\boldsymbol{\ell}w.$$

Multiplicando ambos lados por $\boldsymbol{x}^*$, obtenemos

$$1 - r\boldsymbol{p}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* = (1+r)w.$$

Ahora de la ec. (7.1), pre-multiplicando por $\boldsymbol{p}$,

$$\boldsymbol{p}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* = 1/R,$$

entonces

$$1 - r/R = (1+r)w.$$

Resolviendo para este modelo tenemos la relación

$$r = \frac{R}{1+Rw}(1-w), \tag{7.4}$$

que no es una relación lineal como en el modelo sraffiano porque los salarios se paga *ex-ante*, pero nos permite expresar claramente la tasa de ganancia como función inversa de w y de R.

Supongamos ahora que la mercancía salario $\boldsymbol{d}^*$ tiene la misma composición que $\boldsymbol{x}^*$. Entonces, poderíamos escribir la ec. (6.1) como

$$\boldsymbol{v}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{v}\boldsymbol{d}^*\boldsymbol{\ell}(1+\sigma) = \boldsymbol{v}. \tag{7.5}$$

También tenemos que

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{\ell}\boldsymbol{x}^* = 1.$$

Ahora la relación de la mercancía estándar funciona para cualquier r, en particular para $r = 0$, en cuyo caso, $\boldsymbol{pd}^* = w = \boldsymbol{vd}^* = \delta$, tal que

$$r = \frac{R}{1 + R\delta}(1 - \delta) = R\frac{\sigma}{1 + \sigma + R}, \tag{7.6}$$

dando lugar a las mismas relaciones del teorema fundamental marxiano. Notar que para este caso $\boldsymbol{pAx}^* = 1/R = \boldsymbol{vAx}^*$ por lo que $\boldsymbol{px}^* = \boldsymbol{vx}^*$, los salarios son los mismos en precios y en valores, y por lo tanto las tasas de ganancia también son iguales, $r = \phi(\boldsymbol{x}^*)$.

7.4. Nota sobre la formación de los precios de producción

Un tema discutido en la literatura marxista es si los valores, y en particular la plusvalía, juegan un rol central en el desarrollo capitalista. La crítica neoricardiana o sraffiana (discutida a continuación) argumenta que no hace falta referirse a los valores para entender una economía que se maneja en variables en precios. Aquí presentamos uno de los posible desarrollos para establecer la relación entre valores y precios, que puede ser encuadrada en la discusión de si hay una transformación de valores a precios histórica.

El proceso de formación de los precios de producción tiene su explicación en la regulación de los precios de mercado, fenómeno visible del capitalismo. En palabras de Marx "las mercancías no se intercambian simplemente como tales mercancías, sino como productos de capital" Marx (1894, vol. III, p.164). Marx enfatiza que es "absolutamente correcto considerar los valores de las mercancías, no sólo teóricamente sino históricamente, como el *prius* de los precios de producción" (Marx (1894, vol. III, p.180)).

Así, el estudio de la economía capitalista puede desglosarse en tres situaciones. Tal es el enfoque adoptado por Rubin, y que conviene analizar en profundidad. Según este autor

> "La teoría de los precios de producción supone la existencia de

> los tres tipos básicos de relaciones de producción entre personas en la sociedad capitalista (relaciones entre productores de mercancías, relaciones entre capitalistas y obreros, y relaciones entre grupos particulares de capitalistas industriales). (...) Los críticos de la teoría de Marx que ven una contradicción entre la teoría del valor trabajo y la teoría del precio de producción no comprenden el método de Marx. Este método consiste en un análisis coherente de diversos tipos de relaciones de producción entre los hombres, o, por así decir, de diversas dimensiones sociales."(Rubin (1929, p.278))

La consideración de los tres tipos mencionados obliga a considerar la distribución del trabajo como mediada, regulada indirectamente por la distribución del capital. Se trata de considerar la igualdad en las relaciones económicas, donde en un caso será una *igualdad de trabajo* mientras que en el otro será *igualdad del capital* (Marx (1894, vol. III, p.284)). A continuación analizaremos la manera en que se desarrolla esa regulación.

En el primer libro de El Capital se consideraba que el valor de uso que venía a satisfacer una mercancía, soporte material del valor, correspondía en su justa medida al volumen de una determinada necesidad social (entendiéndose esta como necesidad solvente, es decir efectiva). En dicha parte de la exposición se hacía abstracción de las variaciones tanto de la oferta como de la demanda, para entender el concepto valor en toda su pureza: "(...) si la oferta y la demanda regulan el precio comercial, o mejor dicho, las oscilaciones de los precios comerciales con respecto al valor comercial, tenemos que , por otra parte el valor comercial regula la proporción entre la oferta y la demanda o es el centro en torno al cual las fluctuaciones de la oferta y la demanda deben oscilar los precios comerciales" (Marx (1894, vol. III, p.185)). La teoría marginalista posterior explica sólo el tamaño de las divergencias de los precios con respecto a los valores comerciales.

Sin embargo, so riesgo de describir sólo una tautología, no puede explicarse el concepto a partir de sus divergencias con el mismo. "El cambio o venta de las mercancías por su valor es lo racional, la ley natural que rige su equilibrio; de ella debe partirse para explicar las divergencias; y no al revés, partiendo de las divergencias para explicar la ley" (Marx (1894, vol. III, p.191)) Pera entender este proceso es necesario considerar lo que Marx considera demanda y oferta normales, es decir aquellas que permiten abstraernos de las mismas dejando como precio de "equilibrio" al valor de la mercancía. Y además considerar la distinción entre valor y valor comercial y entre éste y los precios de mercado (o comerciales). En estas formas se expresan en su plenitud la posibilidad de incongruencia, mediada por el valor comercial, entre el concepto (valor) y su forma (precio de mercado).

La demanda normal es un parámetro estándar para hacer a un lado el volumen de la necesidad social de cada bien y permitir la comparación de distintas magnitudes de valor (trabajo abstracto) objetivadas en valores de uso diferentes. A su vez se supone que la oferta se ajusta para conseguir que las mercancías se intercambien ya sea por sus valores o por sus precios de producción. Este supuesto no es más que la noción de competencia usada por Ricardo según el cual se supone mercancías reproducibles si se está dispuesto a dedicar a ellas el trabajo necesario. El valor comercial se define como el valor medio establecido en una rama de la producción. Si por alguna circunstancia, la necesidad social se viera desplazada más allá de la correspondiente oferta normal serían las mercancías producidas en las peores o en las mejores condiciones las que regularían al mismo. Este concepto es diferente del valor individual, aquel que se obtiene por la cantidad de trabajo concreto de cada empresa dentro de una misma rama, y por consiguiente de la misma mercancía. La diferencia entre el valor social y el individual constituye la fuente de plusvalía extraordinaria entre los productores de la misma rama, es decir constituye la manera en que se desarrolla la competencia entre capitales individuales productores de la misma mercancía. Esta competencia se desarrolla a través de la innovación tecnológica, en la busca incesante de plusvalía relativa.

Este valor comercial resulta el centro de gravitación, en torno al cual girarán los precios comerciales o de mercado. "Y lo que decimos del valor comercial es también aplicable al precio de producción, cuando este sustituya al valor comercial. El precio de producción se regula en cada una de las esferas y con arreglo a circunstancias especiales. Y es, a su vez, el centro en torno al cual giran los precios comerciales diarios y a base del cual se compensan dentro de determinados periodos." (Marx (1894, vol. III, p.183)) Y en otra parte "el precio de producción es ya de por sí una forma completamente enajenada y prima facie absurda del valor de la mercancía; una forma que se presenta en el plano de la concurrencia y , por tanto, en la conciencia del capitalista vulgar y también, como es lógico, en la del economista vulgar." (Marx (1894, vol. III, p.201))

Ahora bien, ¿cual es el proceso por el cual se forman los precios de producción? Dicho análisis debe realizarse considerando la migración de capitales de una rama a otra en busca de las ganancias superiores que realizan en primera instancia aquellas mercancías producidas con baja composición orgánica. En palabras de Marx:

> "Pero los capitales se retiran de las esferas de producción en que la cuota de ganancia es baja, para lanzarse a otras que arrojan una ganancia más alta. Este movimiento constante de emigración e inmigración del capital, en una palabra, esta distribución del capital entre las diversas esferas de producción atendiendo al alza o a la baja de la cuota de ganancia, determina una relación entre la oferta y la demanda de tal naturaleza, que la ganancia media es la misma en las diversas esferas de producción." (Marx (1894, vol. III, p.198))

Este proceso es independiente de la competencia dentro de una misma rama que lleva a la búsqueda de plusvalía relativa. Por el contrario el problema de la transformación sólo tiene que ver con las ganancias que se derivan de trasladar el monto invertido (bajo la forma de dinero, de ahí su posibilidad de migración) a otras ramas.

Siguiendo a Rubin, Mandel (1985) expone en pocas palabras la relación entre el proceso de nivelación de la tasa de ganancia y de la relación de este proceso con la formación de los precios. Tal como será sostenido frente a otras exposiciones, justamente ese es el objetivo de encontrar una solución al problema de la transformación. El proceso consiste en que si "partimos de la realización efectiva de la masa de plusvalor global producido en cada ramo de la producción por los capitalistas que operan en ese ramo, habrá una tasa de ganancia mucho más alta en los ramos de producción que tengan una composición orgánica del capital más baja y gasten menor (N.d.A. en el texto dice mayor) proporción de sus inversiones de capital en equipos y materias primas. Si todo permanece igual (lo que significa, sobre todo, no suponer por el momento ningún cambio en la distribución de la demanda total de diferentes valores de uso producidos por distintos ramos de producción), esa tasa de ganancia superior al promedio atraerá capital adicional hacia esos ramos. Eso hará aumentar la producción (el suministro) por encima de la demanda social, lo que precipitará la declinación de los precios, lo que precipitará la declinación de la tasa de ganancia." (Mandel (1985, p.173)) Rubin (1929, p.201) expresa también que "no es la plusvalía la que fluye, sino que los capitales mismos fluyen de una esfera de la producción a otra hasta que las tasas de ganancia son igualadas."

El análisis de Rubin se centra en la concepción de la existencia de equilibrio entre las distintas ramas de producción. Es decir aquel estado en el cual no existen razones para suponer transferencias de capital de una rama hacia otra. En el equilibrio las mercancías se venden de acuerdo al valor comercial, de lo contrario el precio comercial será diferente del valor comercial. La consideración de una economía en la que existe competencia entre capitales supone que el valor comercial adquiere la forma de precio de producción.

Cabe citar nuevamente a Rubin:

> "El precio de producción es un centro teóricamente definido de equilibrio, un regulador de las constantes fluctuaciones de los precios comerciales. en las condiciones de una economía capitalista el precio de producción desempeña la misma función social que el precio comercial determinado por los gastos de trabajo desempeña en las condiciones de una economía mercantil simple. Tanto el primero como el segundo son 'precios de equilibrio', pero el valor trabajo corresponde a un estado de equilibrio en la distribución del trabajo entre las diversas ramas de la economía mercantil simple, y el precio de producción corresponde al estado de equilibrio en la distribución de capitales entre las diferentes ramas de la economía capitalista." Rubin (1929, p.228)

Dado un determinado esquema de reproducción en valores, es decir suponiendo una economía en la cual el valor medio de cada rama es validado socialmente, los capitales expandirán la oferta (más allá de la normal, es decir levantando el supuesto de abstracción antes mencionado) y deprimirán los precios de las mercancía producidas con baja composición orgánica. Esto implica, que el esquema de reproducción no puede mantenerse, dado que cambiaron las proporciones del vector de productos.

7.5. Crítica sraffiana

7.5.1. La jerarquía de los precios sobre los valores

El punto central de la crítica sraffiana es que para hallar la tasa de ganancia **no hace falta referirse a los valores**. Si deseamos realizar la transformación de valores a precios, manteniendo la tasa de ganancia expresada en valores, en general caeremos en un sistema sin solución. Steedman (1977, p.34) lo formula como "(...) la tasa de ganancia es un concepto utilizado en el análisis de una economía capitalista al 'nivel de los precios', no al 'nivel de los valores', y la tendencia a la uniformidad de las tasas de ganancia entre las industrias deriva de la movilidad del capital monetario" Sólo se rescata "que la existencia de plusvalía es una condición necesaria y suficiente para la existencia de ganancias" (ibidem, p.34) y "que la explotación capitalista es la fuente de la ganancia" (ibidem, p.35), esto es el Teorema Fundamental Marxiano de Morishima: $\sigma > 0 \Rightarrow r > 0$.

Samuelson (1971) lo escribe de una manera ilustrativa más o menos así: Marx desarrolla un sistema de valores trabajo; lo borra; y desarrolla luego un sistema de precios que explica todo.

7.5.2. Industrias básicas vs no básicas en el modelo marxista

Steedman (1977) también enfatiza que las mercancías básicas y las no básicas juegan un rol central en la determinación de la tasa de ganancia. Algo no considerado por el modelo marxista donde todos los sectores contribuyen en base a su cuota de plusvalía a la plusvalía total.

Podemos suponer el caso en que no todos los bienes entran directamente o indirectamente en la determinación del salario real, la canasta de consumo de los trabajadores. Separemos a los bienes en $1, 2, ..., m$ como los bienes que entran en la determinación del salario real, y $m+1, m+2, ..., n$ en las que no entran. Si nos fijamos en $\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{d\ell}$, tenemos

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1^+ & \boldsymbol{A}_2^+ \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_4^+ \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A}_1^+$ es una matriz $m \times m$, $\boldsymbol{A}_2^+$ es una matriz $m \times (n-m)$, $\boldsymbol{A}_4^+$ es una matriz $(n-m) \times (n-m)$. Entonces la ecuación de precios la podemos escribir como

$$
\begin{aligned}
(1+r)\boldsymbol{p}^m \boldsymbol{A}_1^+ &= \boldsymbol{p}^m \\
(1+r)[\boldsymbol{p}^m \boldsymbol{A}_2^+ + \boldsymbol{p}^{n-m} \boldsymbol{A}_4^+] &= \boldsymbol{p}^{n-m}
\end{aligned}
$$

Entonces la tasa de ganancia se determina solamente en la primera ecuación. El resultado es que r es una función decreciente de los elementos de $\boldsymbol{A}_1^+$. Por un lado se sigue manteniendo la relación inversa entre salario y ganancia. Pero por otro, no es verdad que la plusvalía en agregado cuente para determinar la tasa de ganancia.

Mandel (1985) hace notar, sin embargo, que la producción de armamentos es el clásico ejemplo de bien suntuario no básico. Estaríamos equivocados si no tuvieramos en cuenta que la misma constituye y constituyó un sector importantísimo (y de punta) para el desarrollo del capitalismo. Descartar el efecto de sectores de punta en el desarrollo capitalista, cuyo elemento central y regulador es la tasa de ganancia, sería dejar de lado una parte importante del objeto de estudio.

7.6. Ejemplos numéricos

Ejemplo numérico (Pasinetti, 1977, cap.5)

$n = 3$

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \frac{186}{450} & \frac{54}{21} & \frac{30}{60} \\ \frac{12}{450} & \frac{6}{21} & \frac{3}{60} \\ \frac{9}{450} & \frac{6}{21} & \frac{15}{60} \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 0{,}4133 & 2{,}5714 & 0{,}5 \\ 0{,}0266 & 0{,}2857 & 0{,}05 \\ 0{,}02 & 0{,}2857 & 0{,}25 \end{bmatrix}
$$

Esta matriz es irreducible entonces los 3 bienes entran como insumos. Por otro lado

$$[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1} \simeq \begin{bmatrix} 2{,}16261763 & 8{,}5909139 & 2{,}0144727 \\ 0{,}08688792 & 1{,}7834835 & 0{,}1768242 \\ 0{,}09076831 & 0{,}9084794 & 1{,}4544108 \end{bmatrix}$$

El máximo autovalor es $\lambda_m \simeq 0{,}674 < 1$ (los otros autovalores son 0.2 y 0.074). Entonces $R = \frac{1}{\lambda_m} - 1 \simeq 0{,}48$.

Supongamos que $\ell = \left[\frac{18}{450}\ \frac{12}{21}\ \frac{30}{60}\right] \simeq [0{,}04\ 0{,}05714\ 0{,}5]$. Entonces, el vector de valores es $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\ell}[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1} \simeq [0{,}1818\ 1{,}818188\ 0{,}90909]$.

Supongamos ahora $w = 1$ y $r = 0{,}2 < R$. Entonces podemos resolver $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{\ell}[\boldsymbol{I} - (1+r)\boldsymbol{A}]^{-1} = [0{,}3371224\ 3{,}115189\ 1{,}270264]$ o $p_2 \simeq 9{,}24p_1$ y $p_3 \simeq 3{,}77p_1$ como los precios relativos.

Supongamos que $\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0{,}16666 \end{bmatrix}$. Entonces el valor del salario de subsistencia es $\boldsymbol{vd} \simeq 0{,}515 < 1$, tal que $\delta \simeq 0{,}515$ y la tasa de plusvalía $\sigma = \frac{1-\delta}{\delta} \simeq 0{,}9411$.

$$\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{d\ell} = \begin{bmatrix} \frac{186}{450} & \frac{54}{21} & \frac{30}{60} \\ \frac{12}{450} & \frac{6}{21} & \frac{3}{60} \\ \frac{9}{450} & \frac{6}{21} & \frac{15}{60} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0{,}16666 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{18}{450} & \frac{12}{21} & \frac{30}{60} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{222}{450} & \frac{78}{21} & \frac{90}{60} \\ \frac{12}{450} & \frac{6}{21} & \frac{3}{60} \\ \frac{12}{450} & \frac{8}{21} & \frac{20}{60} \end{bmatrix}$$

La tasa de ganancia se determina de la ecuación característica $det[\boldsymbol{I} - (1+r)\boldsymbol{A}^+] = 0$ tal que $\lambda_m^+ \simeq 0{,}84361$ y $R^+ = \frac{1}{\lambda_m^+} - 1 \simeq 0{,}1854$.

Los precios relativos se pueden obtener a partir de $\boldsymbol{p}[\boldsymbol{I} - (1+R^+)\boldsymbol{A}^+] = \boldsymbol{0}$. Notar que no podemos obtener los precios absolutos porque el determinante es 0. Entonces, $p_2 \simeq 9{,}286p_1$ y $p_3 \simeq 3{,}849p_1$.

Ejemplo numérico. (Steedman, 1977, cap.3)

	Insumos				Productos				
	Hierro		Trabajo		Hierro		Oro		Trigo
Hierro	28	$\oplus$	56	$\Rightarrow$	56	$\oplus$	–	$\oplus$	–
Oro	16	$\oplus$	16	$\Rightarrow$	–	$\oplus$	48	$\oplus$	–
Trigo	12	$\oplus$	8	$\Rightarrow$	–	$\oplus$	–	$\oplus$	8
Total	56	$\oplus$	80	$\Rightarrow$	56	$\oplus$	48	$\oplus$	8

Para obtener los valores, notar que $28v_h + 56 = 56v_h$ entonces $v_h = 2$. $16v_h + 16 = 48v_o$ entonces $v_o = 1$. $12v_h + 8 = 8v_t$ entonces $v_t = 4$.

Supongamos que los 80 trabajadores consumen 5 unidades de trigo. Entonces $b = 5v_t = 5 \times 4 = 20$. Así, $s = 80 - b = 80 - 20 = 60$. Por otro lado $c = 56 \times 2 = 112$. La tasa de explotación es $s/b = 60/20 = 3$ y la tasa de beneficios en valores $\phi = s/(c + b) = 60/(112 + 20) = 5/11$.

Para obtener los precios, tenemos 4 ecuaciones y 4 incógnitas, usando $p_o = 1$,

$$(1 + r)(28p_h + 56w) = 56p_h,$$

$$(1 + r)(16p_h + 16w) = 48,$$

$$(1 + r)(12p_h + 8w) = 8p_t,$$

$$80w = 5p_t.$$

La solución es $r = 0{,}5208$, $w = 0{,}2685$, $p_h = 1{,}7052$ y $p_t = 4{,}2960$.

Notar que la producción total en valores es $56 \times v_h + 48 \times v_o + 8 + \times v_t = 56 \times 4 + 48 \times 1 + 8 \times 4 = 192$ y la plusvalía total es 60.

Notar que la producción total en precios es $56 \times p_h + 48 \times p_o + 8 + \times p_t = 56 \times 1{,}7052 + 48 \times 1 + 8 \times 4{,}2960 = 177{,}8592$ y la masa de beneficios totales es total es $116{,}9712 \times 0{,}52 = 60{,}92$.

7.7. Modelos donde la tasa de plusvalía se determina endógenamente

En el modelo marxista la tasa de explotación y plusvalía depende de comparar el valor de la fuerza de trabajo con el valor producido por el trabajo. Los modelos del Cap. 6 asumen que se nececita una canasta básica que determina el salario real, y a partir de ahí se puede compara el valor trabajo de los dos elementos mencionados anteriormente.

La Nueva Interpretación (NI) es una forma de encarar el problema de la transformación de una manera diferente (ver Foley (1982, 1986, 2000), Lipietz (1982), Duménil (1983), y Glick y Ehrbar (1987)). La idea central es que en una economía capitalista los salarios se pagan en dinero y no en especie, entonces la tasa de explotación debe estudiarse en base al valor agregado o producto neto que efectivamente se apropian los capitalistas en comparación con lo que se llevan los trabajadores. Ésto se determina en precios, no en valores. Lo que hagan los trabajadores con su salario monetario es algo que se determina ex-post, de la misma manera que en el modelo sraffiano el salario monetario aparece como una variable distributiva.

En realidad, la NI da lugar a una serie de modelos de transformación donde depende de qué se mantiene invariante en precios y valores da lugar a distintas alternativas. La NI considera que el producto neto y el valor de la fuerza de trabajo debe usarse para la transformación. Una consecuencia negativa de este modelo es que la tasa de ganancia en valores es en general distinta a la obtenida en precios, tal como fuera argumentado por Moseley (2000). Un trabajo de Loranger (2004) realiza una transformación alternativa donde la tasa de ganancia se mantiene invariante. Montes-Rojas (2017) muestra que esta es en realidad un caso particular donde el capital constante y el capital variable, simultáneamente, se mantiene invariante. Ver también una solución alternativa dada por **?** donde se discute la invarianza en el capital constante como alternativa.

Eatwell (1975) estudia el caso de la mercancía estándar definida en el modelo sraffiano (ver Cap. 4) donde si se postulan las condiciones de ese modelo se obtiene la invarianza en el capital variable, capital constante y el producto neto. De todas maneras ésto se mantiene dadas las proporcionalidades de esta normalización en cantidades, dándose una serie de imposibilidades para el caso general. **?** critica este procedimiento y remarca que cambia el foco de estudio de la explotación del producto del trabajo a la distribución del producto neto.

Siguiendo a Montes-Rojas (2017) podemos establecer la siguiente identidad

$$\boldsymbol{\ell} = \alpha\boldsymbol{\ell} + (1-\alpha)\boldsymbol{\ell},$$

donde α corresponde a la parte percibida por los trabajadores y $1-\alpha$ la parte no percibida. De esta manera tenemos $\frac{1-\alpha}{\alpha}$ como la tasa de plusvalía. Notar que en esta simple descomposición no necesitamos hacer referencia a las mercancías consumidas por los trabajadores.

Si consideramos el sistema conjunto, en precios y en valores, tenemos $2n+3$ incógnitas: n valores, n precios, la tasa de explotación α, la tasa de ganancia r y los salarios w. De estos los n valores pueden resolverse independientemente de la ecuación 4.2. Del modelo sraffiano podemos resolver $n+1$ incógnitas, y en este caso nos queda en términos d euna variable distributiva. Así debemos imponer 2 ecuaciones adicionales para solucionar todos las incógnitas.

Asumimos que $\boldsymbol{\ell x} = 1$, tal que la fuerza de trabajo está normalizada a la unidad. A continuación enumeramos una serie de equivalencias que se pueden postular para resolver el sistema conjunto en valores y precios.

A1: Producto bruto

$$\boldsymbol{px} = \boldsymbol{vx} \tag{7.7}$$

A2: Producto neto

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} \tag{7.8}$$

A3: Plusvalía y beneficios

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}-w=\alpha \tag{7.9}$$

C1: Capital agregado

$$\boldsymbol{pAx}+w=\boldsymbol{vAx}+(1-\alpha) \tag{7.10}$$

C2: Capital variable, valor de la fuerza de trabajo

$$w=(1-\alpha) \tag{7.11}$$

C3: Capital constante

$$\boldsymbol{pAx}=\boldsymbol{vAx} \tag{7.12}$$

A partir de estas igualdades se pueden obtener todos los modelos de plusvalía endógena mencionados anteriormente.

La NI corresponde a asumir A2 y C2 (una variación de ésta usa A1-C2, como en Mohun (2004)). La solución ‘profit rate invariant’ de Loranger (2004) corresponde asumir A1 y C1. Montes-Rojas (2017) usa el caso donde se asume invariancia en los dos componentes del capital, ya sea con C1-C2, C2-C3 o C1-C3, todas estas equivalentes entre sí. Finalmente, la solución que

Cuadro 7.1: Comparación de tasa de ganancia y salarios para plusvalía endógena

	A1	A2	C1	C2	C3
A1	-	$r = \phi$, $w = 1 - \alpha$	$r = \phi$, $w \leq 1 - \alpha$	$r \leq \phi$, $w \leq 1 - \alpha$	$r = \phi$, $w = 1 - \alpha$
A2	-	-	$r \geq \phi$, $w \leq 1 - \alpha$	$r \leq \phi$, $w = 1 - \alpha$	$r = \phi$, $w = 1 - \alpha$
C1	-	-	-	$r \leq \phi$, $w = 1 - \alpha$	$r \leq \phi$, $w = 1 - \alpha$
C2	-	-	-	-	$r \leq \phi$, $w = 1 - \alpha$
C3	-	-	-	-	-

Nota: $\varphi(r) = \boldsymbol{\ell}\left((1+r)^{-1}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{x}$.

usa la Mercancía Estándar corresponde a asumir A1-A2, A1-C3 o A2-C3, también llegan al mismo resultado. Notar que A3 es en realidad redundante con cualquier otro par de soluciones, por ello no se usa explíticamente.

Consideremos el ejemplo de Sraffa (1960, sec.25) con 3 mercancías básicas, hierro, carbón y trigo:

$$90\,ton.\ hierro \oplus 120\,ton.\ carbon \oplus 60\,ton.\ trigo \oplus 3/16\,hs.trabajo \Rightarrow 180\,ton.\ hierro$$

$$50\,ton.\ hierro \oplus 125\,ton.\ carbon \oplus 60\,ton.\ trigo \oplus 5/16\,hs.trabajo \Rightarrow 450\,ton.\ carbon$$

$$40\,ton.\ hierro \oplus 40\,ton.\ carbon \oplus 200\,ton.\ trigo \oplus 8/16\,hs.trabajo \Rightarrow 480\,ton.\ trigo$$

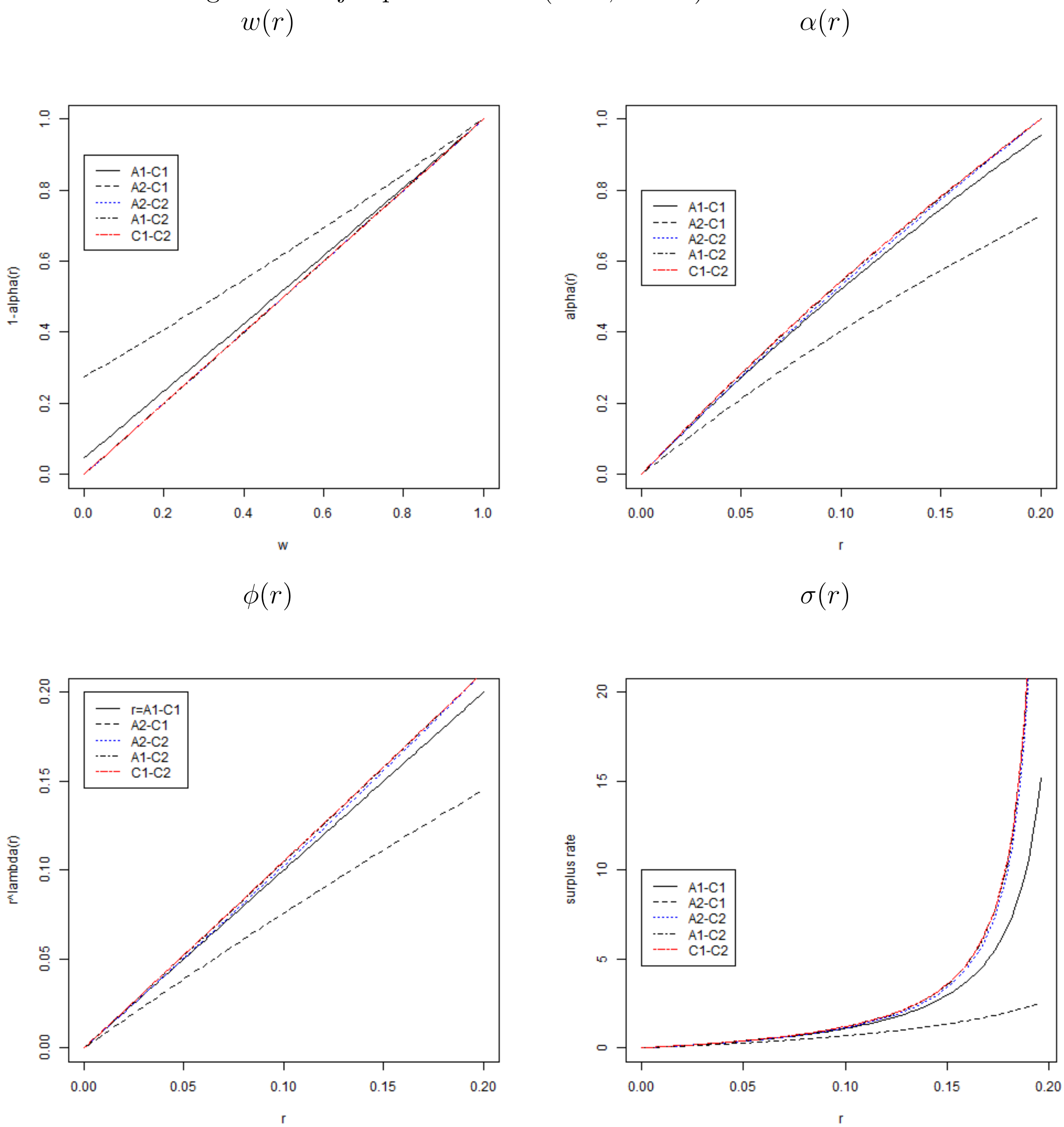
Dado que el hierro se produce en cantidades suficientes para el ciclo de producción, el producto neto solo contiene carbón (165 ton.) y trigo (70 ton.). Para este caso $R = 0{,}20$, con lo cual $r \in [0, R]$.

Cuadro 7.2: Fórmulas para plusvalía endógena

	$w(r)$	$\alpha(r)$	$\phi(r)$	$\sigma(r)$
A1-C1	$\boldsymbol{vx}(\varphi(r))^{-1}$	$\frac{r(1+\boldsymbol{vAx})}{1+r}$	r	$\frac{r(1+\boldsymbol{vAx})}{1+r\boldsymbol{vAx}}$
A2-C1	$\frac{1+r}{1+r+r\varphi(r)}$	$\frac{\varphi(r)}{1+r+r\varphi(r)} - \boldsymbol{vAx}$	$\frac{1-w(r)\varphi(r)+\boldsymbol{vAx}+1-w(r)}{w(r)\varphi(r)-1+w(r)}$	$\frac{\varphi(r)-\boldsymbol{vAx}(1+r+r\varphi(r))}{(1+\boldsymbol{vAx})((1+r+r\varphi(r)))-\varphi(r)}$
A2-C2	$\frac{1+r}{1+r+r\varphi(r)}$	$\frac{r}{1+r+r\varphi(r)}$	$\frac{1-w(r)}{\boldsymbol{vAx}+w(r)}$	$\frac{r\varphi(r)}{1+r}$
A1-C2	$\boldsymbol{vx}(\varphi(r))^{-1}$	$1-\boldsymbol{vx}(\varphi(r))^{-1}$	$\frac{\boldsymbol{vx}-\boldsymbol{vAx}-\boldsymbol{vx}(\varphi(r))^{-1}}{\boldsymbol{vAx}+\boldsymbol{vx}(\varphi(r))^{-1}}$	$(\boldsymbol{vx})^{-1}\varphi(r)-1$
C1-C2 C2-C3 C1-C3	$\frac{\boldsymbol{vAx}(1+r)}{\varphi(r)-1-r}$	$\frac{\varphi(r)-1-r-\boldsymbol{vAx}(1+r)}{\varphi(r)-1-r}$	$\frac{\boldsymbol{vx}-\boldsymbol{vAx}-w(r)}{\boldsymbol{vAx}+w(r)}$	$\frac{\varphi(r)-1-r-\boldsymbol{vAx}(1+r)}{\boldsymbol{vAx}(1+r)}$

Nota: $\varphi(r) = \boldsymbol{\ell}\left((1+r)^{-1}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{x}$.

Figura 7.1: Ejemplo de Sraffa (1960, sec.25)



Capítulo 8

Modelos de producción conjunta

8.1. Introducción

En los capítulos anteriores asumimos que cada mercancía era producida por un sector específico o por un solo proceso. Es decir, que había una correspondencia uno a uno entre sectores (o industrias) y bienes (o mercancías). Un caso más general es asumir que las mismas mercancías pueden producirse en distintos sectores, y que un sector puede producir más de una mercancía.

Primero analizaremos el caso general, denominado de **producción conjunta** (en inglés *joint production*). El caso ilustrativo es aquel en el que un sector produce más de un bien, como por ejemplo gas y petróleo en la industria petroquímica, o lana y carne para la ganadería ovina. Éste modelo introduce complicaciones adicionales para estudiar las condiciones de no negatividad ya que para llevar a cabo un proceso puede ser que se produzca un bien en una forma que parece no ser la óptima. Éste modelo juega un rol central en la crítica neoricardiana al modelo marxista, ya que en modelos de producción conjunta podemos encontrar valores negativos o plusvalía negativa, mientras que puede haber una tasa de ganancia positiva con todos los precios positivos. Sin embargo, como veremos, si planteamos el modelo como uno de optimización no hay conflicto con la teoría del valor trabajo.

Como uso específico de esta metodología estudiamos el tratamiento del **capital fijo** durable. El mismo bien de capital puede usarse en distintos periodos, con distintas productividades e intensidades a lo largo de su vida útil. Este análisis es más genérico que asumir una tasa de depreciación constante, porque el mismo bien debe ser valorado diferente en cada periodo. Sraffa motiva el uso de los métodos de producción conjunta como la manera adecuada de estudiar el capital.

Finalmente estudiamos la **renta diferencial** como otra aplicación particular de esta metodología. Éste modelo es particularmente interesante para países como la Argentina, donde la renta agropecuaria es un factor central del análisis económico. En general la renta se refiere a toda remuneración que no está asociada a un factor primario que no se consume como capital circulante en cada periodo, pero que es esencial para la producción. La tierra, como factor primario escaso, se mantiene como insumo y como producto sin sufrir alteraciones en un modelo de producción conjunta.

8.2. Modelos de producción conjunta

8.2.1. Formulación general del modelo

Supongamos un modelo con dos mercancías y dos procesos. Este modelo lo podemos escribir definiendo a_{ij} como la cantidad de mercancía i que entra en el proceso j, y b_{ij} como la cantidad de la mercancía i producida por el proceso j. En los modelos de producción simple $b_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Así, podemos generar la siguiente tabla:

	Insumos						Productos		
Proceso 1	a_{11}	$\oplus$	a_{21}	$\oplus$	ℓ_1	$\Rightarrow$	b_{11}	$\oplus$	b_{21}
Proceso 2	a_{12}	$\oplus$	a_{22}	$\oplus$	ℓ_2	$\Rightarrow$	b_{12}	$\oplus$	b_{22}
	$\sum a_{1j}$		$\sum a_{2j}$		$\sum \ell_j = 1$		$\sum b_{1j}$		$\sum b_{2j}$

Si usamos los precios p_1 y p_2, r y w, entonces el modelo de precios de producción sraffiano lo podemos escribir como

$$\begin{aligned}(p_1a_{11} + p_2a_{21})(1 + r) + w\ell_1 &= p_1b_{11} + p_2b_{21}, \\ (p_1a_{12} + p_2a_{22})(1 + r) + w\ell_2 &= p_1b_{12} + p_2b_{22}.\end{aligned} \tag{8.1}$$

El modelo general para k mercancías y m procesos lo podemos plantear como (seguimos la formulación general de Pasinetti, 1980)

$$\boldsymbol{pA}(1 + r) + w\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{pB}, \tag{8.2}$$

donde $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son matrices $k \times m$. Notar que en este caso no hay una forma única de estandarizar por proceso o mercancía. (A diferencia de los modelos de producción simple donde se dividía ambos lados de la igualdad por lo producido en cada proceso.)

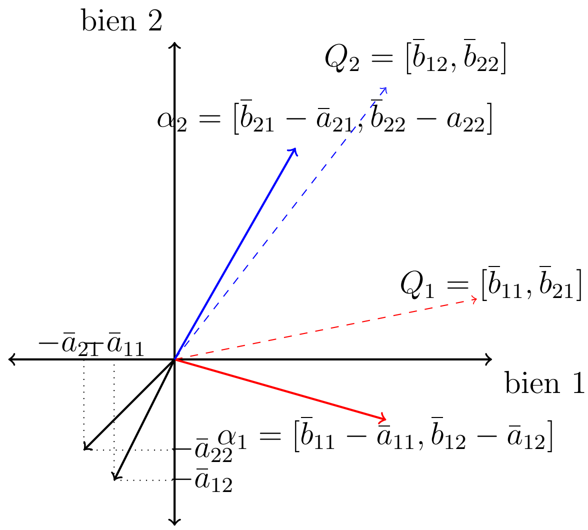
Definamos, siguiendo a Mainwaring (1984), $\bar{a}_{ij} = a_{ij}/\ell_j$ como la cantidad de mercancía i por unidad de trabajo de la industria j que entra en el proceso j, y $\bar{b}_{ij} = b_{ij}/\ell_j$ como la cantidad de la mercancía i por unidad de trabajo de la industria j producida por el proceso j. Entonces podemos reescribir el sistema de precios anterior como

$$(p_1\bar{a}_{11} + p_2\bar{a}_{21})(1 + r) + w = p_1\bar{b}_{11} + p_2\bar{b}_{21},$$

$$(p_1\bar{a}_{12} + p_2\bar{a}_{22})(1 + r) + w = p_1\bar{b}_{12} + p_2\bar{b}_{22}.$$

Siguiendo el procedimiento para producción simple, podemos descibir es-

Figura 8.1: Modelo de producción conjunta (i)



te modelo en términos gráficos usando vectores. La Figura 8.1 representa un caso típico. En este caso definimos a $Q_j = [\bar{b}_{1j}, \bar{b}_{2j}]$ como el vector de productos brutos del sector $j = 1, 2$. A diferencia del modelo de producción simple (ver la Figura 2.1), donde los vectores Q estaban sobre los ejes, podemos tener que este vector se encuentra enteramente en el cuadrante de valores positivos. Si tomamos en cuenta los requerimientos de insumos, armamos los vectores $\alpha_j = [\bar{b}_{1j} - \bar{a}_{1j}, \bar{b}_{2j} - \bar{a}_{2j}]$, $j = 1, 2$, de productos netos.

El efecto de la tasa de ganancia es el mismo que el observado para producción simple. Así, a partir de α_1 y α_2 nos debemos trasladar a β_1 y β_2, respectivamente, donde en cada caso estamos considerando el efecto de r sobre los requerimientos de insumos. Ahora, el vector de precios es entonces la pendiente del vector representado por $\boldsymbol{p}(r)$ que tiene que empezar en el origen y ser ortogonal al segmento que une β_1 con β_2, $\beta_1 \longleftrightarrow \beta_2$. La Figura 8.2 muestra este caso. Notar que si la tasa de ganancia fuera 0, entonces el vector de precios que es ortogonal a $\alpha_1 \longleftrightarrow \alpha_2$ (no aparece en la figura) serían los valores trabajo. A partir de éste análisis también podríamos obtener los salarios reales, como los puntos donde $\beta_1 \longleftrightarrow \beta_2$ cruza los ejes.

Figura 8.2: Modelo de producción conjunta (ii)

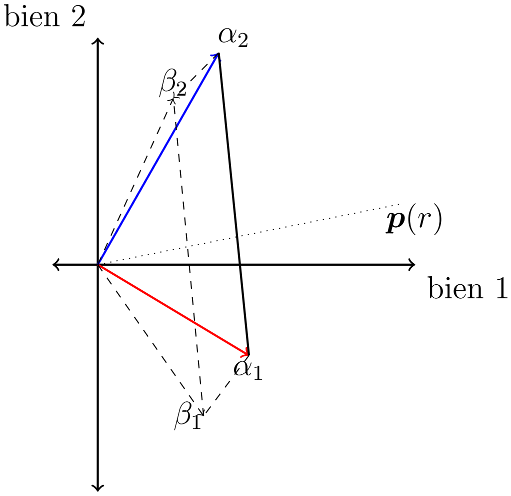
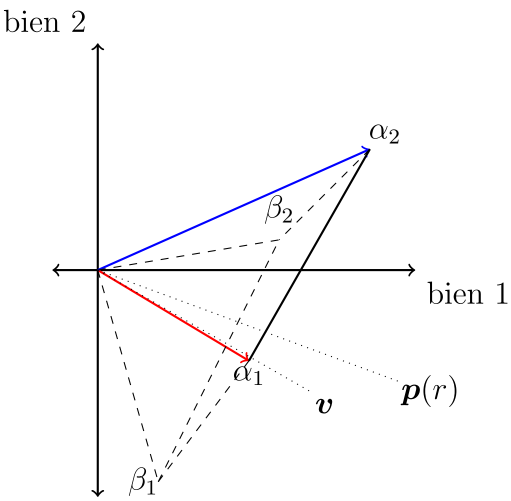


Figura 8.3: Modelo de producción conjunta (iii)



Este modelo tiene complicaciones adicionales. En la Figura 8.3 aparece un caso en el que tanto los valores como los precios (relativos) son negativos. Es decir, se representa un caso en el que se pueden obtener precios y valores negativos. Como veremos a continuación estos casos no deberían tener representación económica, y de hecho están asociados a que alguno de los procesos es redundante y no es necesario. Podemos usar este caso también como ilustrativo de un sistema económico donde hay valores negativos pero existe una tasa de ganancia positiva con precios relativos positivos.

8.2.2. Condiciones de viabilidad para el sistema de precios

A partir de este sistema se pueden analizar las condiciones para que el sistema tenga sentido económico. Éste análisis sigue el trabajo de Manara (1980). Los siguientes vectores y matrices deberían ser no negativos:

$$\boldsymbol{A} \geq 0, \quad \boldsymbol{B} \geq 0,$$

$$\boldsymbol{p} \geq 0, \quad \boldsymbol{\ell} \geq 0,$$

$$r \geq 0, \quad w \geq 0.$$

En este modelo pedimos que todos los precios sean no negativos, conjuntamente con la tasa de ganancia y el salario. El modelo de producción conjunta permite en general que los precios de algunos productos, sobre todo aquellos que no se comercializan, puedan ser negativos.

Definamos:

- $X = \{\boldsymbol{x}'|\boldsymbol{x}' \geqq \boldsymbol{0}'\}$ como el conjunto de posibilidades de producción no negativas.
- $U(r) = \{\boldsymbol{x}'|\boldsymbol{x}' \in X \wedge [\boldsymbol{B} - (1+r)\boldsymbol{A}]\boldsymbol{x}' \geq \boldsymbol{0}'\}$ como el conjunto de posibilidades de producción viables a la tasa de ganancia r.

- $P = \{\boldsymbol{y}|\boldsymbol{y} \geqq \mathbf{0}\}$ precios no negativos.
- $V(r) = \{\boldsymbol{y}|\boldsymbol{y} \in P \wedge \boldsymbol{y}[\boldsymbol{B} - (1+r)\boldsymbol{A}] \geq \mathbf{0}\}$.
- $\mathcal{J} = \{r|U(r) \cap V(r)\}$ es el conjunto de tasas de ganancia que son viables. Notar que esto implica viabilidad tanto en cantidades como en precios.

Así podemos pensar las condiciones de viabilidad para que el sistema sea viable económicamente.

- Condición de viabilidad **CV1**: Sea $\boldsymbol{\iota} = [1, 1, ..., 1]$ un vector $1 \times k$, entonces $[\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}]\boldsymbol{\iota}' > \mathbf{0}'$.
- Condición de viabilidad **CV2**: $\exists \hat{\boldsymbol{p}} : \{\hat{\boldsymbol{p}} > \mathbf{0} \wedge \hat{\boldsymbol{p}}[\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}] > 0\}$.
- Condición de viabilidad **CV3**: $det[\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}] \neq 0$. Esto garantiza que $f(r) = det[\boldsymbol{B} - (1+r)\boldsymbol{A}]$ es un intervalo cerrado con $r = 0$ como su máximo.
- Condición de viabilidad **CV4**: Definamos $V'(r) = \{\boldsymbol{z}|\boldsymbol{z} = \boldsymbol{p}[\boldsymbol{B} - (1+r)\boldsymbol{A}] \wedge \boldsymbol{p} \in V(r)\}$ como la imagen de $V(r)$. Entonces, $r \in \mathcal{J} \rightarrow \boldsymbol{L} \in V'(r)$. Es decir, para cada r el vector $\boldsymbol{\ell}$ nos da precios positivos, o sea, $p(r) = \boldsymbol{\ell}[\boldsymbol{B} - (1+r)\boldsymbol{A}]^{-1} > \mathbf{0}$.

Manara (1980) muestra que **CV1-CV4** son condiciones suficientes para la viabilidad del sistema. Notar que **CV4** implica que los valores $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\ell}[\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}]^{-1} > \mathbf{0}$, dado que $r = 0 \in \mathcal{J}$.

8.2.3. Ejemplo con valores y plusvalía negativos

Consideremos este ejemplo de Steedman (1977, cap.11). Éste autor utiliza el ejemplo de producción conjunta para criticar el modelo marxista de determinación de valores. En este ejemplo se muestra un caso donde los valores pueden ser negativos mientras que los precios con tasas de ganancia positiva no.

			Insumos					Productos	
Proceso 1	5	$\oplus$	0	$\oplus$	1	$\Rightarrow$	6	$\oplus$	1
Proceso 2	0	$\oplus$	10	$\oplus$	1	$\Rightarrow$	3	$\oplus$	12

Asumamos además que la canasta que compone el salario real es de 3 unidades del bien 1 y 5 unidades del bien 2 para 6 unidades de trabajo.

Resolvamos el sistema en términos de $w = 1$ (labour commanded),

$$(1+r)5p_1 + 1 = 6p_1 + p_2,$$

$$(1+r)10p_2 + 1 = 3p_1 + 12p_2,$$

$$3p_1 + 5p_2 = 6.$$

Entonces, $r = 0{,}20$, $p_1 = \frac{1}{3}$, $p_2 = 1$ es la solución.

Supongamos ahora el sistema en valores,

$$5v_1 + 1 = 6v_1 + v_2,$$

$$10v_2 + 1 = 3v_1 + 12v_2,$$

que tiene solución $v_1 = -1$ (¡negativo!) and $v_2 = 2$.

Supongamos ahora otro ejemplo de un sistema en cantidades donde se usan 6 unidades de trabajo, 5 en el primer proceso y 1 en el segundo.

			Insumos					Productos	
Proceso 1	25	$\oplus$	0	$\oplus$	5	$\Rightarrow$	30	$\oplus$	5
Proceso 2	0	$\oplus$	10	$\oplus$	1	$\Rightarrow$	3	$\oplus$	12
Total	25		10		6	$\Rightarrow$	33		17

Entonces el producto neto es $(8, 7)$ de los cuales hay que restar $(3, 5)$ que es el consumo de los trabajadores. Queda así disponible una cantidad $(5, 2)$ de producto neto para los capitalistas (consumo o inversión para reproducción ampliada). Calculemos, $v = 3 \times (-1) + 5 \times 2 = 7$, $s = 5 \times (-1) + 2 \times 2 = -1$, es decir, la plusvalía es negativa, mientras que $r > 0$. **Así con producción conjunta la existencia de plusvalía no es una condición necesaria para la existencia de ganancia.**

Éste problema de valores y plusvalía negativa, sin embargo, puede analizarse desde un punto de vista de optimización. Sin duda, lo que está pasando es que a medida que cambia la tasa de ganancia, puede cambiar la forma adecuada de producir. Así para determinados valores puede que no sea conveniente usar algunos procesos, cuya ineficiencia económica se refleja en precios negativos. Morishima (1976) y Morishima y Catephores (1978) estudian el modelo marxista usando el modelo de von Neumann,[1] donde la producción es explícitamente analizada como un modelo de programación lineal. En este modelo, si permitimos que se maximice la producción usando las restricciones de producción conjunta vamos a obtener los mismos resultados que en el análisis de producción simple de Morishima.

El modelo general lo podemos escribir como

$$\min_{\boldsymbol{y}} \ \boldsymbol{\iota} \cdot \boldsymbol{y}$$

sujeto a

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{d}$$

$$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0},$$

donde $\boldsymbol{d}$ es el vector de mercancías que componen el salario real y ι es un vector de unos de la misma dimensión de la cantidad de procesos. La solución a este modelo muestra la distribución del tiempo de trabajo (dentro del vector unitario) que produce mercancías que son al menos tan grandes como para

[1]Para una exposición completa del modelo de von Neumann ver Takayama (1985, cap. 6).

satisfacer lo requerido por el salario real.

Este problema tiene una versión dual,

$$\max_{\boldsymbol{v}} \ \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{d}$$

sujeto a

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{v} \leq \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\iota}$$

$$\boldsymbol{v} \geq \boldsymbol{0},$$

donde $\boldsymbol{v}$ se puede interpretar como el costo marginal laboral, o los valores trabajo. En este caso, $\min_{\boldsymbol{y}} \ \iota \cdot \boldsymbol{y} = \max_{\boldsymbol{v}} \ \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{d}$. Así $s(\boldsymbol{y}^*) = 1 - \boldsymbol{\iota} \cdot \boldsymbol{y}^* = s(\boldsymbol{v}^*) = 1 - \boldsymbol{v}^* \cdot \boldsymbol{d}^*$ es la masa de plusvalía, y $\sigma(\boldsymbol{y}^*) = s(\boldsymbol{y}^*)/\iota \cdot y^* = \sigma(\boldsymbol{v}^*) = s(\boldsymbol{v}^*)/\boldsymbol{v}^* \cdot \boldsymbol{d}$, la tasa de plusvalía, ambas positivas. Steedman (1977) enfatiza que esta interpretación del valor no se corresponde a la que tenía Marx.

8.2.4. Mercancías básicas y no básicas

Como fuera señalado anteriormente, la distinción entre mercancías básicas y no básicas juega un rol central en el modelo sraffiano. Siguiendo con la notación del Cap. **??** asumamos que $n = k + m$ donde k se refiera al número de mercancías básicas, y $m = n - k$ a las no básicas. Asumimos que las mercancías están ordenadas tal que primero están las k básicas y luego las m no básicas. Los vectores de producción, precios y trabajo son $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}_1 \ \ \boldsymbol{x}_2]'$, $\boldsymbol{p} = [\boldsymbol{p}_1 \ \ \boldsymbol{p}_2]$ y $\boldsymbol{\ell} = [\boldsymbol{\ell}_1 \ \ \boldsymbol{\ell}_2]$ respectivamente, donde 1 representa a las básicas y 2 a las no básicas.

Definamos las particiones $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}' \\ \boldsymbol{A}'' \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}' \\ \boldsymbol{B}'' \end{bmatrix}$, donde $\boldsymbol{A}'$ y $\boldsymbol{B}'$ son de dimensiones $k \times n$ mientras que $\boldsymbol{A}''$ y $\boldsymbol{B}''$ son $m \times n$. Definamos también la matriz $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}'' \\ \boldsymbol{B}'' \end{bmatrix}$ de dimensión $2m \times n$. De acuerdo a Sraffa, si las m mercancías de cada una de esas matrices son no básicas, entonces $\boldsymbol{D}$ es de rango m.

Otra forma de verlo es la siguiente. Escribamos ahora

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} \end{bmatrix}.$$

Entonces, las columnas que corresponden a las últimas m filas de las matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son no básicas si existe una matriz $\boldsymbol{T}$ de orden $m \times k$ tal que

$$\boldsymbol{A}_{21} = \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{T},$$

$$\boldsymbol{B}_{21} = \boldsymbol{B}_{22}\boldsymbol{T}.$$

Ahora si definimos

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_k & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{T} & \boldsymbol{I}_m \end{bmatrix},$$

y

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{M},$$

$$\bar{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{M},$$

obtenemos unas matrices que tienen la estructura requerida par separar entre básicas y no básicas. En particular,

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{A}}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{B}}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_{22} \end{bmatrix},$$

tal que

$$\bar{\boldsymbol{A}}_{11} = \boldsymbol{A}_{11} - \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{T},$$

$$\bar{\boldsymbol{B}}_{11} = \boldsymbol{B}_{11} - \boldsymbol{B}_{12}\boldsymbol{T}.$$

Si tomamos la ecuación 8.2, post-multipliada por $\boldsymbol{M}$, tenemos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_1\bar{\boldsymbol{A}}_{11}(1+r) + w\bar{\boldsymbol{\ell}}_1 &= \boldsymbol{p}_1\bar{\boldsymbol{B}}_{11} \\ \boldsymbol{p}_1 A_{12}(1+r) + \boldsymbol{p}_2 A_{22}(1+r) + w\boldsymbol{\ell}_2 &= \boldsymbol{p}_1\bar{\boldsymbol{B}}_{11} + \boldsymbol{p}_2 B_{22} \end{aligned}$$

donde definimos $\bar{\boldsymbol{\ell}} = \boldsymbol{\ell}\boldsymbol{M} = [\bar{\boldsymbol{\ell}}_1 \;\; \boldsymbol{\ell}_2] = \boldsymbol{\ell}$ con $\bar{\boldsymbol{\ell}}_1 = \boldsymbol{\ell}_1 - \boldsymbol{\ell}_2\boldsymbol{T}$.

Así, este modelo tiene la misma estructura que la que definía a las mercancías básicas de las no básicas en producción simple. Sin embargo, notar que el modelo anterior depende de $\boldsymbol{T}$ y entonces depende de las condiciones de producción en el sistema de mercancías no básicas.

Steedman (1980) propone otra forma de ver el modelo de producción conjunta. Definamos $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})^{-1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{M} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{M})^{-1}$ tal que

$$\boldsymbol{H} = \left[\begin{array}{cc} (\boldsymbol{A}_{11} - \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{T})(\boldsymbol{C}_{11} - \boldsymbol{C}_{12}\boldsymbol{T})^{-1} & [\boldsymbol{A}_{12} - (\boldsymbol{A}_{11} - \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{T})(\boldsymbol{C}_{11} - \boldsymbol{C}_{12}\boldsymbol{T})^{-1}\boldsymbol{C}_{12}]\,\boldsymbol{C}_{22}^{-1} \\ bm0 & \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{C}_{22}^{-1} \end{array} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc} \boldsymbol{H}_{11} & \boldsymbol{H}_{12} \\ bm0 & \boldsymbol{H}_{22} \end{array} \right],$$

donde $\boldsymbol{C}_{ij} = (\boldsymbol{B}_{ij} - \boldsymbol{A}_{ij})$.

Si usamos $r = R$ y $w = 0$, entonces

$$\boldsymbol{p}\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}(1+R) = \boldsymbol{p}\boldsymbol{B}\boldsymbol{M},$$

implica

$$\boldsymbol{p}\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}R = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{M} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{M})\boldsymbol{M},$$

o

$$\boldsymbol{p}\boldsymbol{H}R = \boldsymbol{p}.$$

Este sistema de ecuaciones tiene la misma forma que en el caso de producción simple donde $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$ y $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I}$.

En general,

$$\boldsymbol{pA}(1 + r) + w\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{pB},$$

implica

$$\boldsymbol{pH}r + w\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p},$$

usando la definición $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A})^{-1}$. Entonces, podemos resolver a

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p}_1 &= \boldsymbol{v}_1[\boldsymbol{I} - r\boldsymbol{H}_{11}]^{-1}w \\
\boldsymbol{p}_2 &= (\boldsymbol{v}_2 + r\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{H}_{12})^{-1}(\boldsymbol{I} - r\boldsymbol{H}_{22})w
\end{aligned}$$

Otra vez, vemos que de la primera ecuación podemos resolver por las variales distributivas y los precios de las mercancías básicas $\boldsymbol{p}_1$ independendientemente de $\boldsymbol{p}_2$.

8.3. Capital fijo

El punto central del uso del capital fijo es que se mantiene como medio de producción en más de un periodo. El mismo medio de producción en dos periodos diferentes se debe considerar como un bien diferente, que por tanto merece un precio diferente. En general una industria que usa un bien de capital durable en varios periodos, deberá considerarse como sectores diferentes de acuerdo a la cantidad de periodos del capital fijo durable.

Consideremos el siguiente sistema de producción. Tenemos dos bienes, hierro y máquinas, donde el primer bien solo usa máquinas un periodo (todo como capital circulante) y el segundo puede usar las máquinas dos periodos. Usamos la numeración: 1:hierro, 2: máq.nueva y 3: máq.vieja (¡la misma máquina pero en diferentes periodos!), siguiendo a Woods (1990, cap.). El proceso de producción de máquinas debe desdoblarse en cómo actúan las máquinas el primer y el segundo periodo, dando lugar a 3 sectores.

Proceso Hierro

$$x_{11}\ hierro \oplus x_{21}\ maq.nueva \oplus \ell_1\ trabajo \Rightarrow x_1\ hierro$$

Proceso Máquinas

$$x_{12}\ hierro \oplus x_{22}\ maq.nueva \oplus \ell_2\ trabajo \Rightarrow x_2\ maq.nueva \oplus x_{22}\ maq.vieja$$

$$x_{13}\ hierro \oplus x_{22}\ maq.vieja \oplus \ell_3\ trabajo \Rightarrow x_3\ maq.nueva$$

En este caso: x_{11} es la cantidad de hierro que entre en el proceso para producir x_1 de hierro, mientras que x_{21} es la cantidad de máquinas necesarias para eso. x_{12} es la cantidad de hierro y x_{22} la cantidad de máquinas nuevas para producir x_2 máquinas el primer año. En éste último caso el capital fijo se mantiene y aparece como producto en términos de sí mismo, x_{22}. Éstas mismas máquinas son las que se usan el segundo periodo, que aparecen como insumos (junto con x_{13} de hierro) para producir máquinas nuevas en cantidad x_3.

El sistema de precios es

$$(1+r)(p_1x_{11}+p_2x_{21})+w\ell_1=p_1x_1$$

$$(1+r)(p_1x_{12}+p_2x_{22})+w\ell_2=p_2x_2+p_3x_{22}$$

$$(1+r)(p_1x_{13}+p_3x_{22})+w\ell_3=p_2x_3$$

p_3 es el precio de una máquina vieja, que no necesariamente es un precio de mercado. En realidad es un precio interno imputado al proceso de producción.

Podemos reescribir el sistema de precios de las máquinas en

$$p_2 x_2 = w\ell_2 + (1+r)p_1 x_{12} + ((p_2 - p_3)x_{22} + rp_2 x_{22}),$$

como la suma de capital circulante más fijo.

Para que el sistema sea viable necesitamos

$$x_1 \geq x_{11} + x_{12} + x_{13},$$

$$x_2 + x_3 \geq x_{21} + x_{22}.$$

Del sistema de precios podemos eliminar x_{22} y p_3 (siguiendo a Woods, 1990, p.177) y obtener el siguiente sistema

$$(1+r)(p_1 A_{11} + p_2 A_{21}) + wA_1 = p_1,$$
$$(1+r)(p_1 A_{12}(r) + p_2 A_{22}(r)) + wA_2(r) = p_2,$$

donde $A_{11} = x_{11}/x_1$, $A_{21} = x_{21}/x_1$, $A_1 = \ell_1/x_1$, $A_{12}(r) = ((1+r)x_{12} + X_{13})/((1+r)x_2 + x_3)$, $A_{22}(r) = ((1+r)x_{22})/((1+r)x_2 + x_3)$, $A_2(r) = ((1+r)\ell_2 + \ell_3)/((1+r)x_2 + x_3)$. De este sistema podemos resolver para (p_1, p_2, w, r). Luego podemos obtener p_3, el precio asignado a las máquinas viejas.

Uno de los resultados más interesantes es que el precio p_3 puede aparecer como negativo al resolver el sistema. Esto lo podemos interpretar en términos de elección de técnica. Si $p_3 < 0$ entonces no es económicamente conveniente usar el tercer proceso, y las máquinas deberían dejarse de usar luego del primer año.

De hecho podemos entonces comparar dos técnicas: α utiliza las máquinas en los dos periodos dando lugar a un proceso de producción conjunta, mientras que β sólo usa un periodo:

Proceso Hierro

$$x_{11}\ hierro \oplus x_{21}\ maq.nueva \oplus \ell_1\ trabajo \Rightarrow x_1\ hierro$$

Proceso Máquinas

$$x_{12}\ hierro \oplus x_{22}\ maq.nueva \oplus \ell_2\ trabajo \Rightarrow x_2\ maq.nueva$$

Qué técnica es conveniente solo puede analizarse una vez que se comparan las dos fronteras (w, r) correspondientes al proceso que usa la máquina solo por un periodo y la que usa la máquina por dos periodos. El análisis así se convierte en uno de elección de técnicas.

8.4. Renta diferencial

Pasamos ahora a una aplicación imporantísima de los modelos de producción conjunta. El análisis de la renta diferencial. El caso típico es analizar el pago de renta al uso de la tierra, pero se aplica a cualquier otro factor no reproducible. De hecho podemos considerar que éste caso es en realidad el modelo básico neoclásico. En el modelo sraffiano de renta, la demanda juega de vuelta un rol pasivo, aunque puede determinar la escasez del factor no reproducible y por ende determina la existencia y el nivel de la renta.

Supongamos dos mercancías básicas, 1 y 2, donde la mercancía 2 usa el factor primario no reproducible (ej. tierra), mientras que la 1 no.

Supongamos dos tipos de tierra o recurso natural finito no reproducible tipo 1 y tipo 2. Supogamos que para satisfacer la demanda no alcanza con un solo tipo. Si un solo tipo de tierra fuera suficiente para la demanda entonces estaríamos en el modelo sraffiano básico, y no habría renta de ningún tipo.

Para la mercancía 2, hay entonces 2 procesos

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 \oplus a_{21}x_2 \oplus \ell_1 &\Rightarrow x_1 \\
a_{12}x_1 \oplus a_{22}x_2 \oplus a_{32}t_1 \oplus \ell_2 &\Rightarrow x_2 \oplus a_{32}t_1 \\
a_{13}x_1 \oplus a_{23}x_2 \oplus a_{43}t_2 \oplus \ell_3 &\Rightarrow x_1 \oplus a_{43}t_2
\end{aligned}
$$

En este caso a_{32} es el uso de tierra tipo 1 en el proceso 1 de la mercancía 2. Y a_{43} es el uso de tierra tipo 2 en el proceso 2 de la mercancía 2. Notar que la tierra no se "consume", con lo cual forma parte del producto.

La **renta** se paga como un premio a un factor que es escaso.

Tenemos entonces dos posibilidades: (α) si se usa toda la tierra 2 y la tierra 1 sólo en parte, entonces la tierra 1 es **marginal**, se paga renta a la 2 y no a la 1; (β) si se usa toda la tierra 1 y la tierra 2 sólo en parte, entonces la tierra 2 es **marginal**, se paga renta a la 1 y no a la 2.

Para el caso (α), tenemos las siguientes ecuaciones de precios:

$$(p_1^\alpha a_{11} + p_2^\alpha a_{21})(1+r) + w^\alpha \ell_1 = p_1^\alpha, \tag{8.3}$$

$$(p_1^\alpha a_{12} + p_2^\alpha a_{22})(1+r) + w^\alpha \ell_2 = p_2^\alpha, \tag{8.4}$$

$$(p_1^\alpha a_{13} + p_2^\alpha a_{23})(1+r) + \varrho^\alpha a_{43} + w^\alpha \ell_3 = p_2^\alpha. \tag{8.5}$$

En este caso ϱ^α es la renta por unidad de la tierra tipo-2 (la tierra tipo-1 es marginal).

Usando la mercancía 1 como *numeraire*, podemos encontrar la relación $w - r$ a partir de (8.3) y (8.4) solamente. Esto lo podemos llamar como el subsistema $\boldsymbol{p} - w - r$. Notar que la renta no juega ningún rol.

Entonces, podemos encontrar

$$\varrho^\alpha = \left((1+r)\ell_1 k(r) + \ell_2 f^\beta(r) - \ell_3 f^\alpha(r)\right)/a_{43} g^\alpha(r) \tag{8.6}$$

donde

$$k(r) = a_{12}\left(1 - (1+r)a_{23}\right) - a_{13}\left(1 - (1+r)a_{22}\right). \tag{8.7}$$

$f^{\beta}(r)$ está definido en la siguiente diapositiva.

(Woods, 1990, p.230) expone claramente el modelo sraffiano de la renta y como se sigue del trabajo de Ricardo: "Éste resultado confirma el argumento ricardiano: 'El precio del maíz no es alto porque hay renta, pero la renta existe porque el precio del maíz es alto; y como fue analizado, no habrá reducción en el precio del maíz a menos que los terratenientes abandonen la renta' (Ricardo, 1951, pp. 74-5)."

Para el caso (β), tenemos las siguientes ecuaciones de precios:

$$(p_1^{\beta}a_{11} + p_2^{\beta}a_{21})(1+r) + w^{\beta}\ell_1 = p_1^{\beta}, \tag{8.8}$$

$$(p_1^{\beta}a_{12} + p_2^{\beta}a_{22})(1+r) + \varrho^{\beta}a_{32} + w^{\beta}\ell_2 = p_2^{\beta}, \tag{8.9}$$

$$(p_1^{\beta}a_{13} + p_2^{\beta}a_{23})(1+r) + w^{\beta}\ell_3 = p_2^{\beta}. \tag{8.10}$$

En este caso ϱ^{β} es la renta por unidad de la tierra tipo-1 (la tierra tipo-2 es marginal).

Usando la mercancía 1 como *numerario*, podemos encontrar la relación (w, r) a partir de (8.8) y (8.10) solamente. Esto lo podemos llamar como el sub-sistema $\boldsymbol{p} - w - r$. Notar que la renta no juega ningún rol.

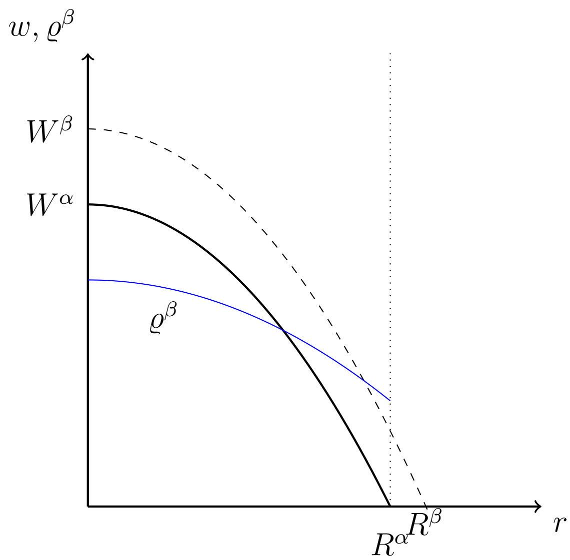
Entonces, podemos encontrar

$$\varrho^{\beta} = \left(-(1+r)\ell_1 k(r) - \ell_2 f^{\beta}(r) + \ell_3 f^{\alpha}(r)\right)/a_{32}g^{\beta}(r). \tag{8.11}$$

Notar que entonces $sign(\varrho^{\beta}) = -sign(\varrho^{\alpha})$.

El análisis de la renta extensiva da lugar a diferencias sustanciales con el modelo sraffiano básico. Si solamente un proceso es necesario, entonces se calcula como cambio de técnica, 'frontera exterior', usando el análisis de elección de técnica. Si se necesitan las dos tierras (una marginal, la otra no) se usa la 'frontera interior'. Es decir, la renta en realidad, absorve remunera-

Figura 8.4: Renta extensiva



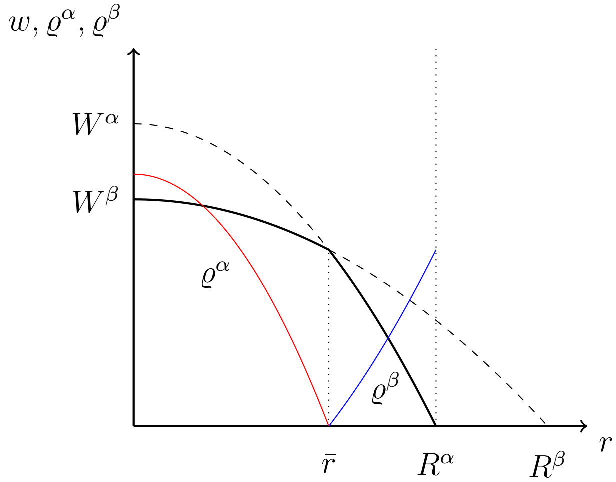
ciones ya sea de los trabajadores o parte de la ganancia de los capitalistas. Si se asume que el elemento dinámico de la economía son los capitalistas, y que la tasa de ganancia está asociada al crecimiento económico, entonces la presencia de renta tiene un efecto nocivo sobre la economía. Éste punto, vale decir, asume que los terratenientes juegan un rol pasivo y, en cierta manera, parasitario del sistema económico.

La Figura 8.4 presenta un ejemplo en el que la tierra 1 da lugar a un proceso que es siempre más rentable, y por lo tanto en el caso de que haya que usar ambos tipos de factores primarios para hacer frente a la demanda, siempre se paga renta por el uso de la tierra 1 y la tierra 2 es marginal. En este caso, para $0 \leq r \leq R^\alpha$, $\varrho^\beta > 0$. Notar que no puede darse el caso en el que $r > R^\alpha$ porque en ese caso no es rentable usar ambos tipos de tierra.

La Figura 8.5 presenta un ejemplo en el que hay un switch point con las dos técnicas. En este caso,

- para $0 \leq r < \bar{r}$, $\varrho^\alpha > 0$,

Figura 8.5: Renta extensiva



- para $\bar{r} < r \leq R^\alpha$, $\varrho^\beta > 0$,
- para $r = \bar{r}$, $\varrho^\alpha = \varrho^\beta = 0$.

Capítulo 9

Modelos con consumo endógeno

9.1. Introducción

En este capítulo consideramos explíticamente las decisiones de consumo dentro del modelo de precios de producción. Un punto central es que seguimos trabajando con el modelo de reproducción simple, donde no hay límite de cantidades a la producción, excepto por la condición de pleno empleo $\boldsymbol{\ell x} = 1$. Así distintos patrones de demanda no van a tener un efecto sobre los precios dado que no se generan problemas de escasez. Es decir, se puede producir todo lo que se quiera con una técnica dada, siempre y cuando sea suficiente el factor trabajo.

Asumimos que hay dos tipos de consumidores, que se representan en base a la distribución funcional del ingreso: trabajadores (ℓ) y capitalistas (k). Se supone que cada uno de estos agregados representa una suma de demandas individuales que da lugar a determinadas preferencias agregadas. En los modelos que vamos a estudiar usamos siempre como numerario $w = 1$ y entonces todos los precios (incluido implícitamente el salario real) dependen de las condiciones técnicas y la tasa de ganancia, r. Este caso no aplica cuando el salario es cero, en cuyo caso $r = R$.

Asumimos que la tasa de ganancia, r, los precios $\boldsymbol{p}$ y las cantidades $\boldsymbol{x}$ se consideran como dadas a la hora de decidir cuánto consumir. Dado que el salario real está dado como numerario el problema de maximización de los trabajadores es estándar en la teoría microeconómica, siendo su restricción de presupuesto muy simple e igual a 1. Los capitalistas por su parte consumen lo que resta para agotar el producto neto, aunque también eligen el consumo para maximizar la utilidad.

Cabe mencionar que el supuesto clásico de considerar que el salario real viene especificado en cuanto a una canasta de subsistencia no es necesario en el modelo sraffiano, tampoco en el marxista. Como menciona Salvadori (2000) en un análisis de la demanda en Sraffa, si el salario se considera como parte del excedente, éste no puede depender solo de necesidades fisiológicas o condiciones sociales. Tampoco que el consumo de los depende de los precios relativos y la tasa de ganancia.

9.2. Características comunes a todos los modelos

En todos los modelos considerados se deben satisfacer ciertas condiciones.

La primera es la condición de viabilidad $\boldsymbol{c} \leq (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$, que marca que lo que se consume no puede exceder el producto neto. En este modelo tenemos que el consumo es la suma de lo que consumen los trabajadores y lo que consumen los capitalistas, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}^{\ell} + \boldsymbol{c}^{k}$. Si no hay inversión, se tiene que satisfacer con igualdad,

$$\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x}. \tag{9.1}$$

Por otro lado, tenemos que $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{x}$, con lo que multiplicando ambos lados de la igualdad por $\boldsymbol{\ell}$, obtenemos $\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{v}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{\ell}\boldsymbol{x} = 1$. Esto nos da una restricción de presupuesto agregada basada en el consumo, que es lineal en los valores-trabajo:

$$\boldsymbol{vc} = v_1c_1 + v_2c_2 + \ldots + v_nc_n = 1. \tag{9.2}$$

Esta última ecuación tiene que satisfacerse para cualquier distribución del ingreso.

Los precios se determinan de acuerdo al modelo del Cap. 3 usando $w = 1$ como *numéraire*,

$$\boldsymbol{pA}(1 + r) + \boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{p}. \tag{9.3}$$

Ahora podemos entonces escribir el problema de maximización de la utilidad de los trabajadores,

$$\max_{(c_1^\ell, c_2^\ell, \ldots, c_n^\ell)} u^\ell \left((c_1^\ell, c_2^\ell, \ldots, c_n^\ell)\right), \tag{9.4}$$

sujeto a

$$p_1c_1^\ell + p_2c_2^\ell + \ldots + p_nc_n^\ell \leq 1. \tag{9.5}$$

Notar que si el consumo de los trabajadores bien especificado en una canasta básica fija, el problema se podría reescribir como si la utilidad fuera del tipo Leontief. En este caso, no habría cambios en la canasta de consumo cuando cambian los precios.

Para los capitalistas tenemos,

$$\max_{(c_1^k, c_2^k, \ldots, c_n^k)} u^\ell \left((c_1^k, c_2^k, \ldots, c_n^k)\right), \tag{9.6}$$

sujeto a

$$p_1c_1^k + p_2c_2^k + \ldots + p_nc_n^k \leq r\boldsymbol{pAx}. \tag{9.7}$$

La solución a este problema la definimos como un **equilibrio general con precios de producción**, y viene dada por

1. un vector de productos brutos $\boldsymbol{x}^*$ y consumos $\boldsymbol{c}^*$ que satisfacen ec. (9.1) y (9.2);

2. un vector de precios $\boldsymbol{p}^*$ y una tasa de ganancia dada r^* que satisfacen ec. (9.3);

3. $\boldsymbol{c}^* = \boldsymbol{c}^{\ell *} + \boldsymbol{c}^{k*}$, tal que $\boldsymbol{c}^{\ell *}$ es la solución a (9.4)-(9.5) y $\boldsymbol{c}^{k*}$ es la solución a (9.6)-(9.7).

9.3. Modelo de un bien de consumo

Supongamos un modelo que tiene un único bien de consumo, c_1. Si bien es un problema trivial, podemos pensar que tanto los trabajadores como los capitalistas maximizan la utilidad sobre el único bien de consumo, tal que podemos plantear:

$$max_{c_1^\ell} u^\ell(c_1^\ell) \;\; s.a. \; p_1 c_1^\ell \leq 1, \tag{9.8}$$

$$max_{c_1^k} u^k(c_1^k) \;\; s.a. \; p_1 c_1^k \leq r\boldsymbol{pAx}. \tag{9.9}$$

Si asumimos que la utilidad es estrictamente creciente, entonces las restricciones de presupuesto se satisfacen con igualdad.

$$p_1 c_1^\ell = 1, \tag{9.10}$$

$$p_1 c_1^k = r\boldsymbol{pAx}. \tag{9.11}$$

Notar que en este caso $c_1^\ell = 1/p_1$, es decir, el salario real, expresado en el único bien.

Dado que tenemos un solo bien de consumo, $\boldsymbol{c} = [c_1 \; \boldsymbol{0}]'$, entonces, $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{c}$, donde $c_1 = c_1^\ell + c_1^k$. De esta manera el consumo de los capitalistas es una función de r y de las condiciones técnicas.

9.3.1. Modelo de un solo bien

Supongamos que hay un único bien, con lo cual $n = 1$. En este modelo se utiliza el bien tanto como insumo y como producto, y en esto último se observa la distribución del excedente. En este caso, $x_1 = \frac{1}{1-a_{11}} c_1$. Así, $p_1 c_1^k = r p_1 \frac{a_{11}}{1-a_{11}} (c_1^\ell + c_1^k)$, tal que,

$$c_1^k = \left(\frac{1}{r} \frac{1-a_{11}}{a_{11}} - 1 \right)^{-1} c_1^\ell = \left(\frac{1}{r} \frac{1-a_{11}}{a_{11}} - 1 \right)^{-1} p_1^{-1}.$$

Esto impone la restricción para la no negatividad,

$$\frac{1-a_{11}}{a_{11}} \geq r,$$

que es en realidad la misma restricción que aparece cuando el bien 1 es la única industria básica.

En este caso, $p_1 = (1 - a_{11}(1+r))^{-1}$ con lo que

$$c_1^\ell = (1 - a_{11}(1+r)),$$
$$c_1^k = \left(\frac{1}{r} \frac{1-a_{11}}{a_{11}} - 1 \right)^{-1} (1 - a_{11}(1+r)) = r a_{11},$$

excepto para salarios igual a 0, en cuyo caso $c_1^\ell = 0$ y $c_1^k = 1 - a_{11}$ corresponde a todo lo que se pueda consumir dadas las restricciones de cantidad de trabajo disponible.

9.3.2. Modelo de un bien de consumo no básico y un bien de capital

Supongamos $n = 2$ y que el bien 1 es de consumo y es no básico, y el bien 2 es básico y no se consume. En este caso para producir c_1 unidades necesitamos a_{21} unidades del bien 2, a lo que sumado lo que se usa para producir el bien 2 nos da la siguiente ecuación $a_{21} c_1 + a_{22} x_2 = x_2$. Entonces, $x_1 = c_1 =$

$\frac{1-a_{22}}{a_{21}}x_2$ o $x_2 = \frac{a_{21}}{1-a_{22}}c_1$. Reemplazando en la restricción de presupuesto de los capitalistas,

$$p_1 c_1^k = r p_2(a_{21}+a_{22})x_2 = r p_2(a_{21}+a_{22})\frac{a_{21}}{1-a_{22}}(c_1^\ell + c_1^k),$$

con lo cual podemos despejar c_1^k,

$$c_1^k = \left(\frac{1}{r}\frac{p_1}{p_2}\frac{1-a_{22}}{(a_{21}+a_{22})a_{21}} - 1\right)^{-1} c_1^\ell = \left(\frac{1}{r}\frac{p_1}{p_2}\frac{1-a_{22}}{(a_{21}+a_{22})a_{21}} - 1\right)^{-1} p_1^{-1}.$$

Esto impone la restricción para la no negatividad,

$$\frac{p_1}{p_2}\frac{1-a_{22}}{(a_{21}+a_{22})a_{21}} \geq r.$$

Notar que para el caso de salarios igual a 0, tenemos el máximo consumo obtenible por los capitalistas. Si multiplicamos la restricción de cantidades por ℓ_2, obtenemos $a_{21}\ell_2 c_1 + a_{22}\ell_2 x_2 = \ell_2 x_2$. Ahora usando $\ell_1 x_1 + \ell_2 x_2 = 1$, logramos $\ell_2 a_{21} c_1^k = \ell_2 x_2(1-a_{22}) = (1-\ell_1 c_1^k)(1-a_{22}) = (1-a_{22}) - (1-a_{22})\ell_1 c_1^k)$,

$$c_1^k = \frac{1-a_{22}}{(1-a_{22})\ell_1 + a_{21}\ell_2}.$$

9.3.3. Modelo de un bien de consumo básico y un bien de capital

En este caso, $\boldsymbol{c} = [c_1\ 0]'$, $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. Entonces, $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{c} = \frac{1}{(1-a_{11})(1-a_{22})-a_{12}a_{21}}[(1-a_{22})\quad a_{12}]'c_1 = \frac{1}{\Delta}[(1-a_{22})\quad a_{12}]'c_1$, donde $\Delta = (1-a_{11})(1-a_{22}) - a_{12}a_{21}$. Así,

$$p_1 c_1^k = r[p_1(a_{11}+a_{12})x_1 + p_2(a_{11}+a_{12})x_2] = r/\Delta(p_1(a_{11}+a_{12})(1-a_{22}) + p_2(a_{21}+a_{22})a_{12})(c_1^\ell + c_1^k),$$

entonces

$$c_1^k = \left(\Delta/r\left\{(a_{11}+a_{12})(1-a_{22})+p_2/p_1(a_{21}+a_{22})a_{12}\right\}^{-1}-1\right)^{-1} c_1^\ell = \left(\Delta/r\left\{(a_{11}+a_{12})(1-a_{22})+p_2/p_1\right.\right.$$

Para obtener el máximo consumo de los capitalistas, $1 = \frac{1}{\Delta}(\ell_1(1-a_{22})+\ell_2 a_{12})c_1^k$, entonces

$$c_1^k = \frac{\Delta}{(1-a_{22})\ell_1 + a_{21}\ell_2}.$$

9.4. Modelo de dos bienes de consumo

Supongamos ahora un modelo con $n = 2$ donde ambos bienes son de consumo y básicos. Ahora tanto los trabajadores como los capitalistas elijen en base a las utilidades que aporta cada bien. Así tenemos:

$$\max_{(c_1^\ell, c_2^\ell)} u^\ell(c_1^\ell, c_2^\ell) \;\; s.a. \; p_1 c_1^\ell + p_2 c_2^\ell \leq 1, \tag{9.12}$$

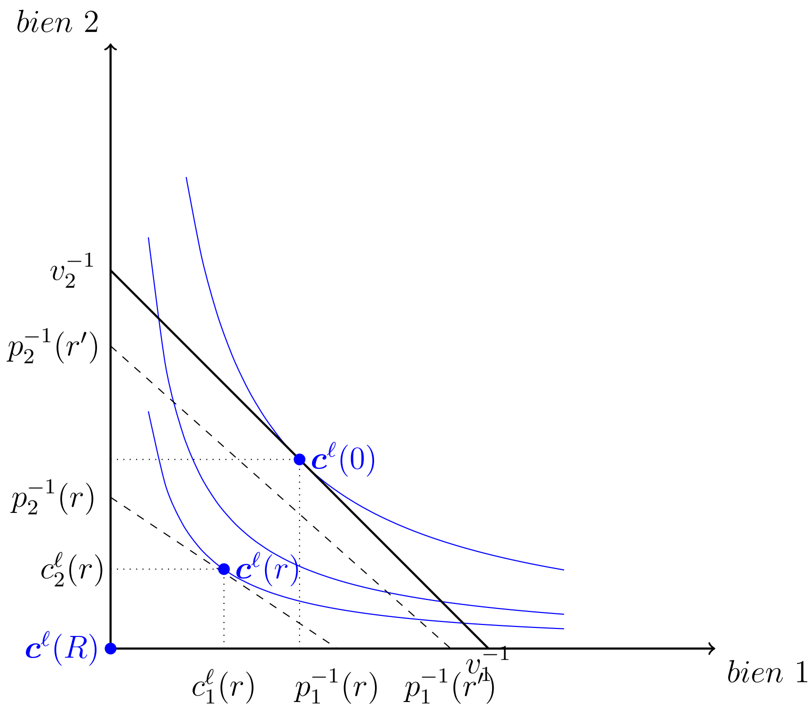
$$\max_{(c_1^k, c_2^k)} u^k(c_1^k, c_2^k) \;\; s.a. \; p_1 c_1^k + p_2 c_2^k \leq r(p_1(a_{11}+a_{12})x_1 + p_2(a_{21}+a_{22})x_2). \tag{9.13}$$

Del problema de maximización podemos obtener las condiciones de primer orden, que excepto que haya soluciones de esquina, implican que la tasa marginal de sustitución es igual al ratio de precios.

Si además asumimos preferencias Cobb-Douglas con parámetro α para los trabajadores y β para los capitalistas tenemos que

$$c_1^\ell = \frac{p_2 \alpha c_2^\ell}{p_1(1-\alpha)}, \tag{9.14}$$

Figura 9.1: Consumo de los trabajadores



$$c_1^k = \frac{p_2 \beta c_2^k}{p_1(1-\beta)}. \tag{9.15}$$

Ahora de la restricción de presupuesto de los trabajadores tenemos $\frac{1}{1-\alpha} p_2 c_2^\ell = 1$, tal que

$$c_1^\ell = \frac{\alpha}{p_1}$$

y

$$c_2^\ell = \frac{1-\alpha}{p_2}.$$

La Figura 9.1 presenta un ejemplo para el consumo de los trabajadores. Las curvas azules corresponden a las curvas de indiferencia de u^ℓ. El segmento $v_1^{-1} \longleftrightarrow v_2^{-1}$ corresponde a las distintas posibilidades de consumo agregadas que se pueden alcanzar. Si la tasa de ganancia fuera tal que $r = 0$, entonces todo el consumo iría a los trabajadores, en cuyo caso podemos pensar que la maximización de la utilidad viene dada por la tangente de las curvas de indiferencia con este segmento, y el consumo $\boldsymbol{c}^\ell(0) = (c_1^\ell(0), c_2^\ell(0))$.

A medida que crece la tasa de ganancia r, también lo hacen los precios y entonces disminuye el salario real. Las líneas punteadas $p_1^{-1}(r) \longleftrightarrow p_2^{-1}(r)$ y $p_1^{-1}(r') \longleftrightarrow p_2^{-1}(r')$ corresponden a dos casos con $r > r'$. Notar que estas no son necesariamente paralelas a $v_1^{-1} \longleftrightarrow v_2^{-1}$ ni entre sí. De hecho a medida que aumenta r aumentan proporcionalmente más los bienes que son más intensivos en bienes intermedios. En el ejemplo de la figura el bien 2. Una vez que fijamos la tasa de ganancia, como por ejemplo en r, podemos encontrar el consumo de los trabajadores como $\boldsymbol{c}^\ell(r) = (c_1^\ell(r), c_2^\ell(r))$, nuevamente con los procedimientos usuales de maximización de la utilidad dada una restricción de presupuesto.

Podemos pensar para los trabajadores un sendero de consumo de $[r, \boldsymbol{c}^\ell(r)]$ que conecte $(0,0)$ (que es $\boldsymbol{c}^\ell(R)$) con $\boldsymbol{c}^\ell(0)$. Este sendero depende de las formas de las curvas de indiferencia y de como van cambiando los segmentos $p_1^{-1}(r) \longleftrightarrow p_2^{-1}(r)$.

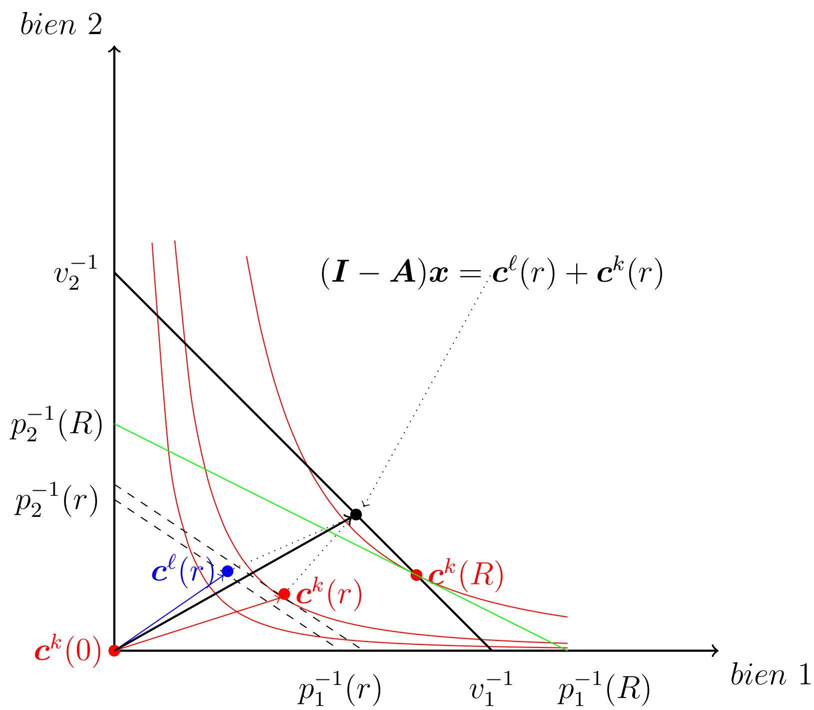
Para obtener el consumo de los capitalistas,

$$\begin{aligned}
\Delta &= \left[(\ell_1(1-a_{22}) + \ell_2 a_{12})(c_1^\ell + c_1^k) + (\ell_1 a_{21} + \ell_2(1-a_{11}))(c_2^\ell + c_2^k)\right] \\
&= \left[(\ell_1(1-a_{22}) + \ell_2 a_{12})(\alpha/p_1 + c_1^k) + (\ell_1 a_{21} + \ell_2(1-a_{11}))((1-\alpha)/p_2 + c_2^k)\right] \\
&= \left[(\ell_1(1-a_{22}) + \ell_2 a_{12})(\alpha/p_1 + \frac{p_2 \beta c_2^k}{p_1(1-\beta)}) + (\ell_1 a_{21} + \ell_2(1-a_{11}))((1-\alpha)/p_2 + c_2^k)\right],
\end{aligned}$$

a partir de lo cual podemos despejar $\boldsymbol{c}_2^k$.

La Figura 9.2 presenta un ejemplo para el consumo de los capitalistas, dado el consumo de los trabajadores de la Figura 9.1. Las curvas rojas corresponden a las curvas de indiferencia u^k. De vuelta podemos representar distintos casos. Si $r = R$ o el consumo de los trabajadores fuera 0, entonces los capitalistas consumirían $\boldsymbol{c}^k(R)$, sobre la restricción de presupuesto agregada dada por la factibilidad de producción $v_1^{-1} \longleftrightarrow v_2^{-1}$ y por los

Figura 9.2: Consumo de los capitalistas



precios $\boldsymbol{p}(R)$ (línea verde).[1] Para otros casos con $r < R$ el consumo debe estar por debajo de $v_1^{-1} \longleftrightarrow v_2^{-1}$ dado que no consumen todo el producto neto. En este caso, dada r se tiene que satisfacer que $\boldsymbol{c}^\ell(r)$ (obtenido como fuera explicado en la figura anterior) sumado a $\boldsymbol{c}^k(r)$ debe estar sobre $v_1^{-1} \longleftrightarrow v_2^{-1}$. Por otro lado, los capitalistas también se enfrentan a los mismos precios que los trabajadores. Así debemos buscar una línea presupuestaria, paralela a $p_1^{-1}(r) \longleftrightarrow p_2^{-1}(r)$, tal que cuando se considere la maximización $\boldsymbol{c}^\ell(r) + \boldsymbol{c}^k(r) \in v_1^{-1} \longleftrightarrow v_2^{-1}$.

Podemos pensar para los capitalistas también un sendero de consumo de $[r, \boldsymbol{c}^k(r)]$ que conecte $(0,0)$ (que es $\boldsymbol{c}^k(0) = \mathbf{0}$) con $\boldsymbol{c}^k(R)$. Este sendero depende de las formas de las curvas de indiferencia y de como va cambiando la pendiente de los segmentos $p_1^{-1}(r) \longleftrightarrow p_2^{-1}(r)$. Notar que este sendero puede o no coincidir con el de los trabajadores. En el ejemplo de la figura $\beta > \alpha$ entonces los capitalistas van a consumir más del bien 1 relativo al bien 2 que los trabajadores.

Un caso particular es cuando los trabajadores y capitalistas tienen las mismas preferencias. Como se enfrentan a los mismos precios, su sendero de consumo será el mismo.

9.5. Modelo marxista con consumo endógeno

Tomemos el modelo marxista estudiado en el Cap. 6. En este caso se asume que el salario real viene especificado en una determinada canasta de consumo de los trabajadores, tal que $\boldsymbol{c}^\ell = \boldsymbol{d}$ está fijo. Así, los trabajadores no tienen nada para elegir. Si este fuera el caso solo los capitalistas enfrentan un proceso de maximización de la utilidad.

Implícitamente, muchos de los modelos marxistas asumen que la canasta de consumo está fija, para lograr la reproducción de la fuerza de trabajo. En

[1] Notar que en este caso los capitalistas estarían mejor si se enfrentaran a los precios dados por $\boldsymbol{v}$. Este resultado no es general dado que depende de las preferencias relativas para los dos bienes y la pendiente de $p_2(R)/p_1(R)$ en comparación con v_2/v_1.

realidad, podríamos pensar que es solamente una simplificación para concentrarse en otros elementos del modelo. En general, el salario real está determinado por circunstancias de naturaleza social y económica, factores históricos e institucionales, así como también relaciones contractuales (Ciccone, Fratini, y Trezzini, 2009). Para un análisis de la teoría del salario en los clásicos ver Stirati (1991).

Dentro de este marco, los trabajadores se van a comportar de manera óptima para elegir lo mejor que esté a su alcance. Si los trabajadores realizan un proceso de maximización, cabe notar que $\boldsymbol{c}^{\ell}(r) = \boldsymbol{d}(r)$. Es decir, la canasta de consumo depende de los precios relativos, que a su vez están explicados por r.

En todo caso, la plusvalía debe determinarse para cada nivel de la tasa de ganancia porque puede ser que cambie la composición de $\boldsymbol{c}^{\ell}$, y que por ende se vean afectadas todas las categorías marxistas. Es sin duda en este punto donde cobran más importancia los modelos marxistas de determinación endógena de la tasa de plusvalía (ver Cap. 7). En estos modelos la tasa de plusvalía, $\sigma(r)$, se determina de acuerdo al valor de r.

En particular, tendríamos que resolver

$$det\left[\boldsymbol{I} - (1+r)\boldsymbol{A} - \boldsymbol{d}(r)\boldsymbol{\ell}\right] = 0, \tag{9.16}$$

si usasemos el salario pagado ex-post como en el modelo sraffiano del Cap. 2, o

$$det\left[\boldsymbol{I} - (1+r)\left(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{d}(r)\boldsymbol{\ell}\right)\right] = 0, \tag{9.17}$$

si usasemos la ec. 6.4 del Cap. 6, donde $\boldsymbol{d}(r)$ se determina como en las secciones anteriores de este capítulo, para luego obtener

$$det\left[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} - (1+\sigma(r))\boldsymbol{d}(r)\boldsymbol{\ell}\right] = 0. \tag{9.18}$$

Una complejidad adicional es que no sabemos a priori si tenemos solución a (9.16) o (9.17) dado que tenemos un componente adicional que depende de

r, la canasta de consumo de los trabajadores.

Tomemos el caso de (9.16) que es el que estudiamos en este capítulo. Si $r = R$, entonces $\boldsymbol{d}(R) = 0$, y la ecuación se satisface, o sea, $det\,[\boldsymbol{I} - (1+R)\boldsymbol{A}] = 0$. Si $r = 0$, sabemos por propiedades de los determinantes que $det\,[\boldsymbol{I} - (1+0)\boldsymbol{A} - \boldsymbol{d}(0)\boldsymbol{\ell}] = (1 - \ell(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{d}(0))\, det(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = (1 - \boldsymbol{vc}) det(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0 det(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0$, dado que $\boldsymbol{d}(0) = \boldsymbol{c}$ (todo el consumo va a los trabajadores) y $\boldsymbol{vc} = 1$. Entonces, para encontrar otra solución diferente a $r = R$ o $r = 0$, necesitamos que exista $0 < r < R$ tal que satisfaga la ec. 9.16. De hecho cabe notar que para cualquier r en ese rango, $det\,[\boldsymbol{I} - (1+r)\boldsymbol{A} - \boldsymbol{d}(r)\boldsymbol{\ell}] = (1 - \ell(\boldsymbol{I} - (1+r)\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{d}(r^*))\, det(\boldsymbol{I} - (1+r)\boldsymbol{A}) = (1-1)\, det(\boldsymbol{I} - (1+r)\boldsymbol{A}) = 0$ donde $\ell(\boldsymbol{I} - (1+r)\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{d}(r) = \boldsymbol{p}(r)\boldsymbol{d}(r) = w = 1$.

Capítulo 10

Modelos dinámicos de inflación

10.1. Introducción

Todos los modelos desarrollados en este libro se refieren a modelos estáticos de determinación de precios relativos y variables distributivas. Los mismos no hacen referencia al nivel de precios o a la dinámica de los mismos. Particularmente relevante es explicar la inflación, dinámicas de aumentos persistentes de precios.

Una extensión simple de estos modelos se pueden aplicar a esquemas dinámicos para explicaciones de la inflación por **puja distributiva**. La mayoría de los modelos post-keynesianos ven a la inflación como un conflicto sobre la distribución del ingreso, ya sea entre trabajadores o entre trabajo y capital. En base a las ideas seminales de Kalecki (1971) y Rowthorn (1977), Lavoie (2014, cap. 8) resume los principales modelos donde la causa originaria de la problemática inflacionaria y generalmente se propagan vía mecanismos de transmisión capturados por **conflicting claims models of inflation**, esquemas formales que asumen la existencia de funciones de reacción para sindicatos (demandas de recomposición salarial) y empresarios (dinámica de precios), en base a la fijación inicial de targets salariales o distributivos.

Esta mirada se puede resumir de acuerdo a Rowthorn (1977, p.179): “La clase trabajadora puede mover la distribución en su favor peleando más vigorosamente por salarios mayores, aunque el costo de esa militancia es una más alta tasa de inflación, cuando los capitalistas tratan, con solo éxito parcial, protegerse ellos mismos subiendo los precios.”

En los modelos estudiados en este capítulo vamos a asumir un cierto grado de autonomía en los reclamos salariales, que en cierta manera dan lugar a modelos de inflación de costos (*cost-push*), mayormente derivadas de los modelos kaleckianos, en contraposición a la mayoría de los modelos neoclásicos basados en cuestiones de exceso de demanda. Los trabajadores reclaman aumentos cuando perciben diferencias entre el target de salario real y el actual, así como cierta inercia para recomponer por la inflación pasada. Los reclamos salariales pueden verse originados en cuestiones de justicia (salario socialmente justo) y de problemas de información. La inercia en la inflación (inflación pasada) se usa como un componente más realista en contraposición a la inflación esperada, que no es factible de calcularse en un mundo incierto y no-ergódico (Arestis y Sawyer, 2015). También el modelo tiene una estructura simple de mark-up por parte de las firmas o industrias sobre el capital invertido.

10.2. Modelo de una mercancía básica

10.2.1. Modelo estático de referencia

Consideremos un modelo de una sola mercancía básica que es a la vez el único bien de consumo que es una simplificación del modelo desarrollado en el libro. Hay un único factor primario con remuneración w. La tecnología indica que para producir una unidad del bien se necesita $a < 1$ unidades y una unidad del factor primario. Supongamos además una tasa de ganancia dada de r, que se va a aplicar sobre el capital invertido. Esta tasa se asume como una constante, donde en el primer modelo (**sraffiano**) se aplica solo sobre los bienes intermedios, y en un segundo modelo (**marxista**) como un mark-up **nominal** sobre el capital invertido.

Tomemos el modelo sraffiano donde los salarios disputan excedente a los capitalistas, y la tasa de ganancia se aplica solo al capital en bienes intermedios,

$$p = (1+r)ap + w \tag{10.1}$$

que se resuelve como

$$p = (1-(1+r)a)^{-1}w. \tag{10.2}$$

Sobre este sistema también vamos a sumir que $1-(1+r)a > 0$ que impone un límite a la tasa de ganancia. Si definimos $\omega = w/p$ como el salario real hay una relación inversa entre ω y r, estándar en los modelos sraffianos:

$$\omega = w/p = (1-(1+r)a). \tag{10.3}$$

Tomemos el segundo modelo con mark-up sobre los costos totales, es decir, que incluyen los salarios.

$$\tilde{p} = (1+\tilde{r})(a\tilde{p}+\tilde{w}), \tag{10.4}$$

que se resuelve como

$$\tilde{p} = \left(\frac{1}{1+\tilde{r}} - a\right)^{-1} \tilde{w}. \tag{10.5}$$

Si definimos $\tilde{\omega} = \tilde{w}/\tilde{p}$ como el salario real hay una relación inversa entre

$\tilde{\omega}$ y $\tilde{r}$, tantas veces discutida:

$$\tilde{\omega} = \tilde{w}/\tilde{p} \quad = \quad \left(\frac{1}{1+\tilde{r}} - a\right). \tag{10.6}$$

Sobre este sistema vamos a sumir que $1-(1+\tilde{r})a > 0$ que impone un límite a la tasa de ganancia.

10.2.2. Modelo dinámico

Consideremos ahora un modelo dinámico. Los precios no necesariamente están en el equilibrio estático.

En el modelo sraffiano, en cada momento del tiempo (ej. t, $t-1$) tenemos

$$p_t \quad = \quad (1+r)ap_{t-1} + w_t, \tag{10.7}$$

$$p_{t-1} \quad = \quad (1+r)ap_{t-2} + w_{t-1}. \tag{10.8}$$

Si restamos la primera ecuación menos la segunda, y dividimos por p_{t-1},

$$\frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}} = (1+r)a\frac{p_{t-1} - p_{t-2}}{p_{t-1}} + \frac{w_t - w_{t-1}}{p_{t-1}}. \tag{10.9}$$

Llamemos $\pi_t = \frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}}$ y $\pi_{t-1} = \frac{p_{t-1} - p_{t-2}}{p_{t-2}}$ a las tasas de inflación del modelo sraffiano, en cada momento del tiempo, y $\eta_t = \frac{w_t - w_{t-1}}{w_{t-1}}$ es la inflación de costos (o sea el aumento de los precios del factor primario, en este caso el trabajo) y $\omega_{t-1} = \frac{w_{t-1}}{p_{t-1}}$ es el *salario real* en precios de $t-1$.

Tenemos así:

$$\pi_t = (1+r)a\frac{\pi_{t-1}}{1+\pi_{t-1}} + \eta_t\omega_{t-1}. \tag{10.10}$$

De la ecuación (10.7), dividimos por p_{t-1} ambos lados de la igualdad

$$\begin{aligned}
1+\pi_t &= (1+r)a+\omega_t(1+\pi_t) \\
&= (1+r)a(1-\omega_t)^{-1} \\
\Rightarrow \pi_t &= (1+r)a(1-\omega_t)^{-1}-1 \qquad (10.11)
\end{aligned}$$

Otra forma de reescribir el modelo es la siguiente:

$$\pi_t = (1+r)a+(1+\eta_t)\omega_{t-1}-1 \qquad (10.12)$$

$$\pi_t = (1+r)a(1-\omega_t)^{-1}-1 \qquad (10.13)$$

Este sistema tiene 3 variables (π, η, ω), y dos ecuaciones, (10.10) y (10.11). Una de las variables tiene que ser exógena para que se pueda resolver en forma simple. Como la variable que nos interesa explicar es la tasa de inflación, usamos dos casos, en uno el salario real es constante, en otro la tasa de inflación de costos.

Estas dos ecuaciones permiten ver claramente que la inflación depende del salario real esperado. Supongamos que partimos de un valor dado ω_{t-1} que está por debajo de ω^e, un salario real de referencia. Podemos entonces pensar que en la negociación salarial se logre un $\eta_t > 0$. Notemos que de acuerdo a las relaciones de fuerza entre trabajo y capital vamos a lograr un mayor o menor ajuste, dependiendo de el salario real obtenido ω_t. Si r se mantiene fija, o si no ajusta para lo negociado con los trabajadores sin inflación, el resultado es justamente un aumento de los precios.

En el modelo de *mark-up* sobre costos totales (incluyendo la nómina salarial), en cada momento del tiempo (ej. t, $t-1$) tenemos

$$\tilde{p}_t = (1+\tilde{r})(a\tilde{p}_{t-1}+\tilde{w}_t), \qquad (10.14)$$

$$\tilde{p}_{t-1} = (1+\tilde{r})(a\tilde{p}_{t-2}+\tilde{w}_{t-1}). \qquad (10.15)$$

Si restamos la primera ecuación menos la segunda, y dividimos por p_{t-1},

$$\frac{1}{1+\tilde{r}}\frac{\tilde{p}_t-\tilde{p}_{t-1}}{\tilde{p}_{t-1}} = a\frac{\tilde{p}_{t-1}-\tilde{p}_{t-2}}{\tilde{p}_{t-1}} + \frac{\tilde{w}_t-w_{t-1}}{p_{t-1}}. \tag{10.16}$$

Llamemos $\tilde{\pi}_t = \frac{\tilde{p}_t-\tilde{p}_{t-1}}{\tilde{p}_{t-1}}$ y $\tilde{\pi}_{t-1} = \frac{\tilde{p}_{t-1}-\tilde{p}_{t-2}}{\tilde{p}_{t-2}}$ a las tasas de inflación, en cada momento del tiempo. Notar que $\frac{\tilde{p}_{t-1}-\tilde{p}_{t-2}}{\tilde{p}_{t-1}} = 1-\frac{\tilde{p}_{t-2}}{\tilde{p}_{t-1}} = 1-\frac{1}{1+\tilde{\pi}_{t-1}} = \frac{\tilde{\pi}_{t-1}}{1+\tilde{\pi}_{t-1}}$.

Por otro lado tenemos,

$$\frac{\tilde{w}_t-\tilde{w}_{t-1}}{\tilde{p}_{t-1}} = \frac{\tilde{w}_t-\tilde{w}_{t-1}}{\tilde{p}_{t-1}}\frac{\tilde{w}_{t-1}}{\tilde{w}_{t-1}} = \tilde{\eta}_t\tilde{\omega}_{t-1},$$

donde $\tilde{\eta}_t = \frac{\tilde{w}_t-\tilde{w}_{t-1}}{\tilde{w}_{t-1}}$ es la inflación de costos y $\tilde{\omega}_{t-1} = \frac{\tilde{w}_{t-1}}{\tilde{p}_{t-1}}$ es el *salario real* en precios de $t-1$.

Tenemos así la siguiente ecuación dinámica:

$$\tilde{\pi}_t = (1+\tilde{r})a\frac{\tilde{\pi}_{t-1}}{1+\tilde{\pi}_{t-1}} + (1+\tilde{r})\tilde{\eta}_t\tilde{\omega}_{t-1}. \tag{10.17}$$

De la ecuación (10.14), dividimos por p_{t-1} ambos lados de la igualdad

$$\begin{aligned} 1+\tilde{\pi}_t &= (1+\tilde{r})(a+\tilde{\omega}_t(1+\tilde{\pi}_t)) \\ &= (1+\tilde{r})a(1-(1+\tilde{r})\tilde{\omega}_t)^{-1} \\ \Rightarrow \tilde{\pi}_t &= a\left(\frac{1}{1+\tilde{r}}-\tilde{\omega}_t\right)^{-1} - 1 \end{aligned} \tag{10.18}$$

Este sistema también tiene 3 variables $(\tilde{\pi}, \tilde{\eta}, \tilde{\omega})$, y dos ecuaciones, (10.17) y (10.18).

Caso 1: Salario real constante

Tomemos el primer modelo. Si asumimos que $\omega_t = \omega\ \forall t$ es una constante y que η_t ajusta en forma endógena, de la ecuación (10.11),

$$\pi_t = \pi \quad = \quad (1+r)a(1-\omega)^{-1} - 1. \tag{10.19}$$

Con el segundo modelo también obtenemos una ecuación similar,

$$\tilde{\pi}_t = \tilde{\pi} \quad = \quad a\left(\frac{1}{1+\tilde{r}} - \tilde{\omega}\right)^{-1} - 1. \tag{10.20}$$

En ambos casos entonces tenemos una relación positiva entre inflación y r, así como también una relación positiva con el salario real. El problema es que si r (o $\tilde{r}$) y ω (o $\tilde{\omega}$) están dados, no necesariamente satisfacen la relación de un modelo estático, como arriba. De hecho en el caso en el que $\pi = 0$, logramos satisfacer (10.3) en el primer modelo y si $\tilde{\pi} = 0$ (10.6) en el segundo modelo. El problema es en este caso una incompatibilidad entre el mark-up propuesto por los empresarios y las demandas de los trabajadores, que se salda con un aumento constante de precios. A este mecanismo lo denominamos inflación por **puja distributiva**.

Caso 2: Inflación de costos exógena

Asumamos ahora que $\eta_t = \eta > 0$, los salarios crecen en forma exógena a una tasa positiva. Este tipo de caso aplica a economías altamente indexadas. Resolvemos primero para el primer modelo. Supongamos también que el salario real se ajusta de acuerdo a (10.19):

$$\omega_t = \left(1 - \frac{(1+r)a}{1+\pi_t}\right), \tag{10.21}$$

es decir el salario real depende inversamente de r y positivamente de π_t. Reemplazando en (10.10),

$$\begin{aligned} \pi_t &= (1+r)a\frac{\pi_{t-1}}{1+\pi_{t-1}} + \eta\left(1 - \frac{(1+r)a}{1+\pi_{t-1}}\right) &(10.22)\\ &= (1+r)a\frac{\pi_{t-1}-\eta}{1+\pi_{t-1}} + \eta. &(10.23)\end{aligned}$$

Acá no queda claro el efecto. Una mayor tasa de ganancia afecta el efecto inercial de la inflación, pero no amplifica el efecto de η.

Usemos (10.22) en un modelo estacionario, $\pi_t = \pi_{t-1} = \pi$. Entonces, tenemos la ecuación .

$$(1+\pi)\pi = (1+\pi)\eta + (1+r)a(\pi - \eta). \tag{10.24}$$

$$\pi^2 + \pi(1-(1+r)a-\eta) - \eta(1-(1+r)a) = 0. \tag{10.25}$$

$$\pi^* = \frac{1}{2}\left[-(1-(1+r)a-\eta) \pm \sqrt{(1-(1+r)a-\eta)^2 + 4\eta(1-(1+r)a)}\right].$$

Notar que el factor de la raíz es positivo. Entonces asumiendo inflación no-negativa nos quedamos siempre con la raíz positiva, π^*_+. Ahora resolviendo el cuadrado dentro de la raíz llegamos a $\pi^* = \eta$. En este caso, no depende de la tasa de ganancia r, y más bien la inflación siempre se acomoda a los reclamos del factor primario, trabajo en este caso.

Usemos ahora el segundo modelo con (10.20):

$$\omega_t = \left(\frac{1}{1+r} - \frac{a}{1+\pi_t}\right), \tag{10.26}$$

es decir el salario real depende inversamente de r y positivamente de π_t.

Reemplazando ω_{t-1} en (10.17):

$$\pi_t = (1+r)a\frac{\pi_{t-1}}{1+\pi_{t-1}} + (1+r)\eta\left(\frac{1}{1+r} - \frac{a}{1+\pi_{t-1}}\right) \quad (10.27)$$

$$= (1+r)a\frac{\pi_{t-1}-\eta}{1+\pi_{t-1}} + \eta. \quad (10.28)$$

Notar que esta ecuación dinámica es idéntica a (10.22), por lo tanto aplica el mismo análisis: la inflación no depende de r.

Caso 3: Aumento de salarios para obtener un salario real dado

Supongamos que

$$\eta_t = \frac{w_t - w_{t-1}}{w_{t-1}} = \psi(\omega^e - \frac{w_{t-1}}{p_{t-1}}) = \psi(\omega^e - \omega_{t-1}), \quad (10.29)$$

donde ω^e es el salario real que se considera justo y $\psi > 0$ es una constante.

Tenemos así un sistema dinámico con dos ecuaciones y dos variables,

$$\pi_t = (1+r)a + (1+\psi(\omega^e - \omega_{t-1}))\omega_{t-1} - 1 \quad (10.30)$$

$$\pi_t = (1+r)a(1-\omega_t)^{-1} - 1 \quad (10.31)$$

Resolviendo,

$$(1+r)a(1-\omega_t)^{-1} = (1+r)a + (1+\psi(\omega^e - \omega_{t-1}))\omega_{t-1},$$

$$\omega_t = 1 - \left[1 + (1+\psi(\omega^e - \omega_{t-1}))\frac{\omega_{t-1}}{(1+r)a}\right]^{-1}$$

Podemos así pensar en dos causas que generan inflación. La primera es que los trabajadores piden aumentos siempre que el salario real quede rezagado respecto del salario real esperado. Segundo, que la tasa de mark up no sea compatible con ese salario real esperado.

10.3. Modelo de n mercancías

10.3.1. Modelo estático de referencia

El modelo de estático referencia es el mismo que se describe en el Cap. 4. Por simplicidad vamos a usar solo el modelo sraffiano donde el mark-up solo aplica a los biene intermedios. En particular vamos a asumir

$$\boldsymbol{p} = (1+r)\boldsymbol{p}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\ell}w, \tag{10.32}$$

con solución

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{\ell}w[\boldsymbol{I} - (1+r)\boldsymbol{A}]^{-1}, \tag{10.33}$$

donde se asume que $[\boldsymbol{I} - (1+r)\boldsymbol{A}]^{-1} \gg \mathbf{0}$.

10.3.2. Modelo dinámico

En cada momento del tiempo (ej. t, $t-1$) tenemos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_t &= (1+r)\boldsymbol{p}_{t-1}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\ell}w_t, & (10.34)\\ \boldsymbol{p}_{t-1} &= (1+r)\boldsymbol{p}_{t-2}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\ell}w_{t-1}. & (10.35) \end{aligned}$$

Asumamos en primer lugar que $w_t = w_{t-1} = w = 1$ está fijo, conjuntamente con r. En tal caso, el sistema es estable si $(1+r)\boldsymbol{A}$ tiene todos sus autovalores menores a uno en módulo. De esta manera, si partimos de cualquier valor por fuera del equlibrio estático, $\boldsymbol{p}_0$, tenemos garantizada la convergencia si $\lim_{t\to\infty}(1+r)^t\boldsymbol{A}^t p_0 = \mathbf{0}$.

Otros modelos dinámicos pueden considerarse donde se usa una estructura más rica en términos de los rezagos. Ver, por ejemplo, Brida, Cayssials, Rodríguez, y Anyul (2020).

Tomemos ahora otro *numéraire* dada por una mercancía $\boldsymbol{z}$, tal que $\boldsymbol{pz} = 1$ en la solución estática.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_t\boldsymbol{x} &= (1+r)\boldsymbol{p}_{t-1}\boldsymbol{Az} + \boldsymbol{\ell z}w_t, && (10.36) \\ \boldsymbol{p}_{t-1}\boldsymbol{x} &= (1+r)\boldsymbol{p}_{t-2}\boldsymbol{Az} + \boldsymbol{\ell z}w_{t-1}. && (10.37) \end{aligned}$$

La tasa de inflación va a estar determinada por esta mercancía, es decir $\pi_t^z = \frac{\boldsymbol{p}_t\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{p}_{t-1}\boldsymbol{z}} - 1$. Así podemos llegar a la siguiente ecuación:

$$\pi_t^z = (1+r)\frac{\boldsymbol{p}_{t-1}\boldsymbol{Az}}{\boldsymbol{p}_{t-1}\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{\ell z}\frac{w_t}{\boldsymbol{p}_{t-1}\boldsymbol{z}} - 1, \tag{10.38}$$

Usando la definición de η_t del modelo de una mercancía y definiendo $\omega_t^z = \frac{w_t}{\boldsymbol{p}_t\boldsymbol{z}}$ como el salario real medido en la mercancía $\boldsymbol{z}$, obtenemos una ecuación similar a (10.10),

$$\pi_t^z = (1+r)\frac{\boldsymbol{p}_{t-1}\boldsymbol{Az}}{\boldsymbol{p}_{t-1}\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{\ell z}(1+\eta_t)\omega_{t-1}^z - 1 \tag{10.39}$$

Por otro lado, usando (10.36),

$$\begin{aligned} 1+\pi_t^z &= (1+r)\frac{\boldsymbol{p}_{t-1}\boldsymbol{Az}}{\boldsymbol{p}_{t-1}\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{\ell z}\omega^z x_t(1+\pi_t^z) \\ \Rightarrow \pi_t^z &= (1+r)\frac{\boldsymbol{p}_{t-1}\boldsymbol{Az}}{\boldsymbol{p}_{t-1}\boldsymbol{z}}(1-\boldsymbol{\ell z}\omega_t^z)^{-1} - 1 && (10.40) \end{aligned}$$

Resumiendo, tenemos dos ecuaciones:

$$\pi_t^z = (1+r)\frac{\boldsymbol{p}_{t-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{p}_{t-1}\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{\ell}\boldsymbol{z}(1+\eta_t)\omega_{t-1}^z - 1, \tag{10.41}$$

$$\pi_t^z = (1+r)\frac{\boldsymbol{p}_{t-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{p}_{t-1}\boldsymbol{z}}(1-\boldsymbol{\ell}\boldsymbol{z}\omega_t^z)^{-1} - 1. \tag{10.42}$$

Notar que este sistema tiene una dinámica estructura similar a (10.10) y (10.11).

Este sistema puede simplificarse aun más usando la mercancía estándar, tal que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* = \frac{1}{1+R}\boldsymbol{x}^*$ y $\boldsymbol{\ell}\boldsymbol{x}^* = 1$, con lo cual tenemos un sistema de dos ecuaciones dinámicas

$$\pi_t^* = \frac{1+r}{1+R} + (1+\eta_t)\omega_{t-1}^* - 1, \tag{10.43}$$

$$\pi_t^* = \frac{1+r}{1+R}(1-\omega_t^*)^{-1} - 1. \tag{10.44}$$

Llegamos así a que no existen diferencias entre el análisis presentado para una mercancía y éste último para muchas mercancías. En particular, en el caso de la mercancía estándar, los modelos son idénticos si reemplazamos $a = (1+R)^{-1}$.

Bibliografía

ABRAHAM-FROIS, G., Y E. BERREBI (1997): *Prices, Profits and Rhythms of Accumulation*. Cambridge University Press, Cambridge.

ARESTIS, P., Y M. SAWYER (2015): "Aggregate demand, conflict and capacity in the infla- tionary process," *Cambridge Journal of Economics*, 29(6), 959–974.

BRIDA, J. G., G. CAYSSIALS, O. C. RODRÍGUEZ, Y M. P. ANYUL (2020): "A dynamic extension of the classical model of production prices determination," *Journal of Dynamics and Games*, 7(3), 185–196.

CICCONE, R., S. FRATINI, Y A. TREZZINI (2009): "Notas sobre la teoría clásica del valor y la distribución. Microeconomía 1," https://www.scribd.com/document/282521699/Ciccone-et-al-2009a-NOTAS-SOBRE-LA-TEORIA-CLASICA-DEL-V-Y-D-pdf.

DOBB, M. (1973): *Theories of Value and Distribution since Adam Smith. Ideology and Economic Theory*. Cambridge University Press, Cambridge.

DUMÉNIL, G. (1983): "Beyond the transformation riddle: A labor theory of value," *Science and Society*, 47(4), 427–450.

DVOSKIN, A., Y F. PETRI (2017): "Again on the relevance of reverse capital deepening and reswitching," *Metroeconomica*, 68(4), 625–659.

Eatwell, J. (1975): “Mr. Sraffa’s standard commodity and the rate of exploitation,” *Quarterly Journal of Economics*, 89(4), 543–555.

Eichner, A. S. (1976): *The Megacorp and Oligopoly: Microfoundations of Macro Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge.

Fiorito, A. (2019): *Piero Sraffa. Los Fundamentos de la Teoría Clásica del Excedente*. Universidad Nacional de Moreno, Moreno.

Foley, D. K. (1982): “The value of money, the value of labor power, and the Marxian transformation problem,” *Review of Radical Political Economics*, 14(2), 37–47.

Foley, D. K. (1986): *Understanding Capital. Marx’s Economic Theory*. Harvard University Press, Cambridge.

Foley, D. K. (2000): “Recent developments in the labor theory of value,” *Review of Radical Political Economics*, 32(1), 1–39.

Garegnani, P. (1970): “Heterogeneous capital, the production function and the theory of distribution,” *Review of Economic Studies*, 37(3), 407–4365.

——— (1984): “Value and distribution in the classical economists and Marx,” *Oxford Economic Papers*, 36, 291–325.

Glick, M., y H. Ehrbar (1987): “The transformation problem: An obituary,” *Australian Economic Papers*, 26(49), 294–317.

Harcourt, G. (1972): *Some Cambridge controversies in the theory of capital*. Cambridge University Press, Cambridge.

Hicks, J. (1939): *Valor y Capital*. Fondo de Cultura Económica (1971), México.

Howard, M. (1983): *Profits in Economic Theory*. Macmillan Press, London.

Jehle, G. A., y P. J. Reny (2011): *Advanced Microeconomic Theory.* Prentice Hall, New York.

Kalecki, M. (1971): *Ensayos escogidos sobre dinámica de la economía capitalista.* Fondo de Cultura Económica, México.

Knight, F. (1921): *Risk, Uncertainty, and Profit.* Hart, Schaffner & Marx; Houghton Mifflin Company, Boston.

Kurz, H. D., y N. Salvadori (1995): *Theory of Production. A Long Period Analysis.* Cambridge University Press, Cambridge.

Lavoie, M. (2009): *Introduction to Post-Keynesian Economics.* Pallgrave Macmillan UK, London.

——— (2014): *Post-Keynesian Economics. New Foundations.* Edward Elgar Publishing, London.

Lee, F. S. (2006): *Post Keynesian Price Theory.* Cambridge University Press, Cambridge.

Lipietz, A. (1982): "The so-called transformation problem revisited," *Journal of Economic Theory*, 6(1), 59–88.

Loranger, J.-G. (2004): "A profit-rate invariant solution to the Marxian transformation problem," *Capital&Class*, 82, 23–58.

Mainwaring, L. (1984): *Value and Distribution in Capitalist Economies. An Introduction to Sraffian Economics.* Cambridge University Press, Cambridge University Press, Cambridge.

Manara, C. F. (1980): "Sraffa's model for the joint production of commodities by means of commodities," en *Essays on the Theory of Joint Production*, ed. por L. L. Pasinetti, pp. 1–15. Cambridge University Press, Cambridge.

Mandel, E. (1985): *El capital, cien años de controversias en torno a la obra de Karl Marx*. Siglo XXI, Mexico, Mexico.

Marshall, A. (1890): *Principios de Economía*. Ediciones Aguilar (1963), Madrid.

Marx, K. (1894): *El Capital Vol. III. Crítica de la Economía Política*. Fondo de Cultura Económica (1946), México.

Mas-Colell, A., M. D. Whinston, y J. R. Green (1995): *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, New York.

Meek, R. L. (1956): *Studies in the Labour Theory of Value*. Monthly Review Press, London.

Metcalfe, J., y I. Steedman (1979): "Resiwtiching and primary input use," en *Fundamental Issues in Trade Theory*, ed. por I. Steedman, pp. 15–37. Palgrave Macmillan, London.

Mohun, S. (2004): "The labour theory of value as foundation for empirical investigations," *Metroeconomica*, 55(1), 65–95.

Montes-Rojas, G. (2017): "A capital invariant solution to the Marxian transformation problem," *Review of Radical Political Economics*, 49(1), 114–124.

Morishima, M. (1973): *Marx's Economics. A Dual Theory of Value and Growth*. Cambridge University Press, Cambridge University Press, Cambridge.

——— (1976): "Marx from a von Neumann viewpoint," en *Essays in Modern Capital Theory*, ed. por M. Brown, K. Sato, y P. Zarembka, pp.–. North-Holland, New York.

——— (1989): *Ricardo's Economics. A General Equilibrium Theory of Distribution and Growth*. Cambridge University Press, Cambridge.

MORISHIMA, M., Y G. CATEPHORES (1978): *Value, Exploitation and Growth*. McGraw-Hill, Maidenhead, Berks.

MOSELEY, F. (2000): "The 'New Solution' to the transformation problem: A sympathetic critique," *Review of Radical Political Economics*, 32(2), 282–316.

NUTI, D. M. (1977): "The transformation of labour values into production prices and the Marxian theory of exploitation," en *The Subtle Anatomy of Capitalism*, ed. por J. Schwartz, pp. 88–105. Goodyear Publisher, Santa Monica, Ca.

OKISHIO, N. (1961): "Technical changes and the rate of profit," *Kobe University Economic Review*, 7, 85–99.

PASINETTI, L. L. (1977): *Lectures On The Theory of Production*. Columbia University Press, New York.

——— (1980): *Essays on the Theory of Joint Production*. Columbia University Press, New York.

PETRI, F. (1989): *Teorías del Valor y la Distribución*. Universidad Nacional de Moreno (2020), Moreno.

QUADRIO CURZIO, A., Y F. PELLIZZARI (1999): *Rent, Resources, Technologies*. Springer, Berlin.

ROEMER, J. E. (1981): *Analytical Foundations of Marxian Economc Theory*. Cambridge University Press, Cambridge.

ROWTHORN, B. (1977): "Conflict, inflation and money," *Cambridge Journal of Economics*, 1(3), 215–239.

RUBIN, I. I. (1929): *Ensayos sobre la teoría marxista del valor*. Cuadernos de Pasado y Presente 53 (1974), Córdoba.

SALVADORI, N. (2000): "Sraffa on demand: a textual analysis," en *Critical Essays on Piero Sraffa's Legacy in Economics*, ed. por H. Kurz, pp. 181–197. Cambridge University Press, Cambridge.

SAMUELSON, P. (1971): "Understanding the Marxian Notion of Exploitation: A Summary of the So-Called Transformation Problem Between Marxian Values and Competitive Prices," *Oxford Economic Papers*, 9(2), 399–431.

SCHUMPETER, J. A. (1939): *Business Cycles: A Theoretical, Historical, And Statistical Analysis of the Capitalist Process.* McGraw-Hill, New York.

SETON, F. (1957): "The transformation problem," *Review of Economic Studies*, 24(3), 149–160.

SRAFFA, P. (1960): *Production of Commodities by Means of Commodities. Prelude to a Critique of Economic Theory.* Cambridge University Press, Cambridge.

STEEDMAN, I. (1977): *Marx After Sraffa.* NLB, London.

——— (1980): "Basics, non-basics and joint production," en *Essays on the Theory of Joint Production*, ed. por L. L. Pasinetti, pp. 44–50. Cambridge University Press, Cambridge.

STIGLITZ, J. E. (1974): "The Cambridge-Cambridge Controversy in the Theory of Capital: A View from New Haven: A Review Article," *Journal of Political Economy*, 82(4), 893–90.

STIRATI, A. (1991): *The Theory of Wages in Classical Economics. A Study of Adam Smith, David Ricardo and their Contemporaries.* Edward Elgar (1994), Aldershot.

SWEEZY, P. (1942): *The Theory of Capitalist Development.* Monthly Review Press, New York.

TAKAYAMA, A. (1985): *Mathematical Economics*. Cambridge University Press, Cambridge.

VARIAN, H. R. (2015): *Microeconomic Analysis*. Norton, London.

WICKSELL, K. (1901): *Lectures on Political Economy*. Routledge (1934), London.

WOODS, J. E. (1990): *The Production of Commodities. An Introduction to Sraffa*. Macmillan, London.