Regresión simple

Gabriel V. Montes-Rojas

Regresión simple

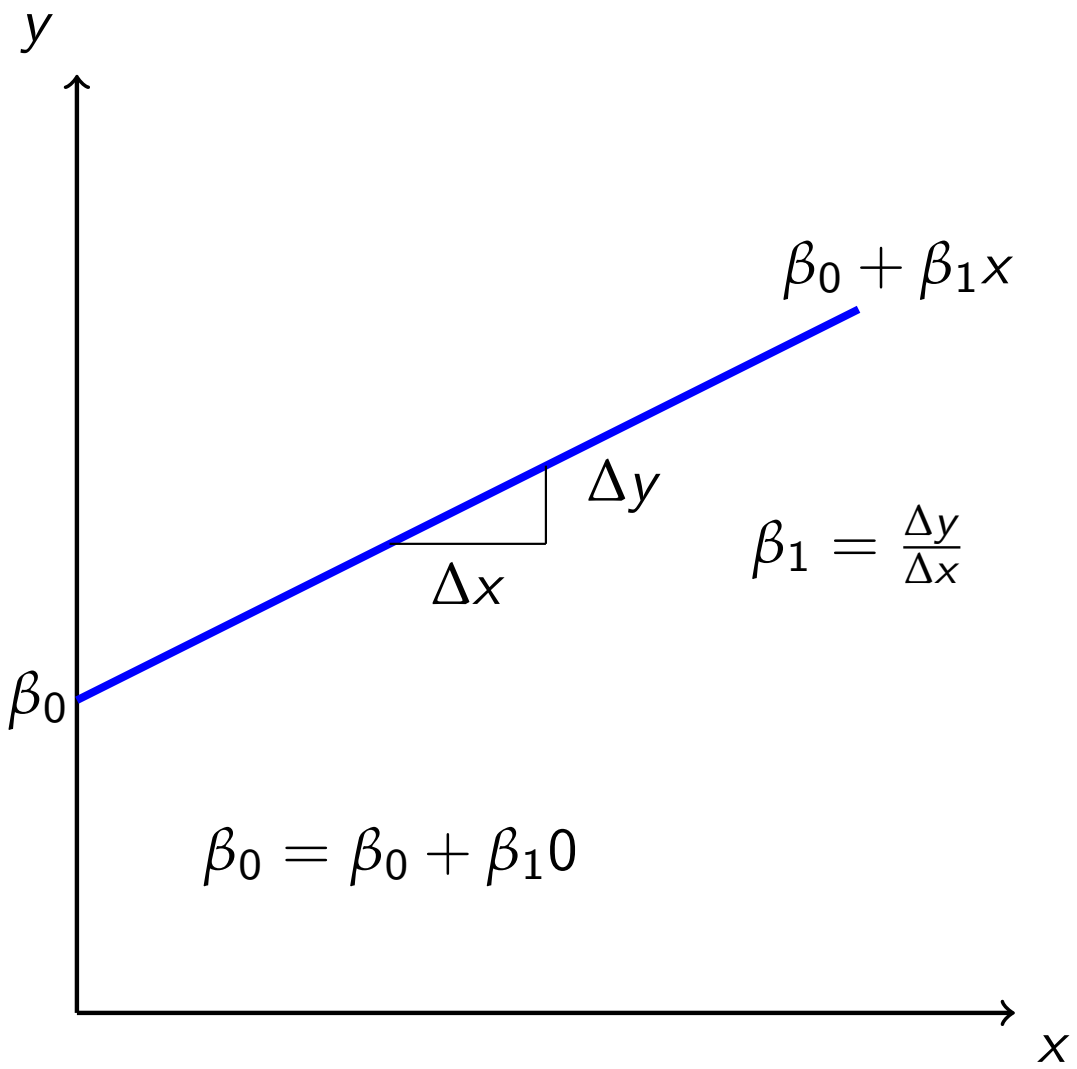
Un modelo de regresión simple es un estudio de la relación entre dos variables (llamadas una dependiente y la otra independiente, x escalar) a través de la siguiente forma:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i, \ i = 1, 2, ..., N$$

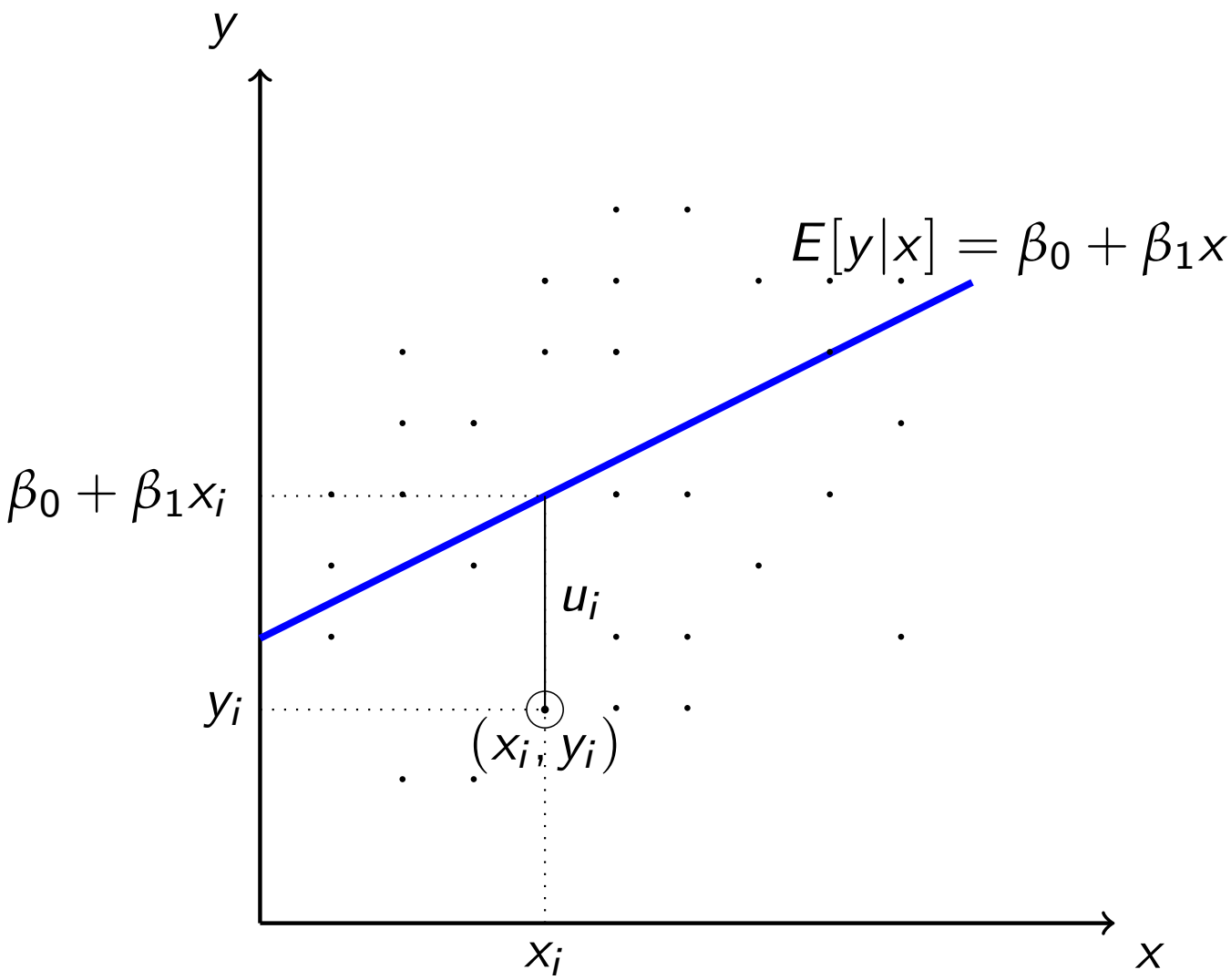
Elementos básicos:

1. Muestra o datos $\{x_i, y_i\}_{i=1}^N = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_N, y_N)\}$, muestra de tamaño N.
2. Modelo lineal $y = \beta_0 + \beta_1 x$
   - y variable dependiente, lo que queremos explicar.
   - x variable independiente/de control/explicativa, cómo vamos a explicar la variable dependiente.
   - β_0 intercepto, valor de y cuando $x = 0$
   - $\beta_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ pendiente, cuánto se incrementa y al incrementarse x por **1 unidad**.
3. u error o residuo, aquello que no podemos observar pero que afecta y.

Modelo de función lineal



Modelo de regresión $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$



Regresión simple

Democracia y crecimiento.

- Datos de N países.
- y variable dependiente, PBI per capita.
- x variable independiente, índice de democracia.
- β_0 intercepto, valor de y cuando $x = 0$.
- $\beta_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ pendiente, cuánto se incrementa y al incrementarse x por **1 unidad**.
- u error o residuo, aquello que no podemos observar pero que afecta y.

$$PBIpercap_i = \beta_0 + \beta_1 Democracia_i + u_i, \ i = 1, 2, ..., N$$

Regresión simple

Educación y salarios.

- Datos de N individuos.
- y variable dependiente, salario.
- x variable independiente, años de educación.
- β_0 intercepto, valor de y cuando $x = 0$.
- $\beta_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ pendiente, cuánto se incrementa y al incrementarse x por **1 unidad**.
- u error o residuo, aquello que no podemos observar pero que afecta y.

$$Salario_i = \beta_0 + \beta_1 Educ_i + u_i, \ i = 1, 2, ..., N$$

Regresión simple

- Una forma de ver los modelos de regresión es la siguiente. Notemos que

$$\beta_1 = \frac{cov(y,x)}{var(x)},$$

bajo el supuesto de que $cov(x,u) = 0$, o sea que la variable explicativa no tiene relación con los errores.

- La prueba es sencilla:

$$\frac{cov(y,x)}{var(x)} = \frac{cov(\beta_0 + \beta_1 x + u, x)}{var(x)} = \frac{\beta_1 cov(x,x) + cov(x,u)}{var(x)}$$

(dado que $cov(.,.)$ se puede distribuir linealmente y $cov(cte, variable\ aleatoria) = 0$)

$$= \beta_1 + \frac{cov(x,u)}{var(x)} = \beta_1$$

(porque $cov(x,x) = var(x)$ y $cov(u,x) = 0$) esto significa que β_1 mide cuanto y se relaciona (covaría) con x, estandarizado por la varianza de x.

Mínimos cuadrados ordinarios

¿Cómo estimamos β_0 and β_1?

Tomemos los residuos (recordar que son no observables...), $u_i \equiv y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i$, $i = 1, 2, ..., n$.

Ahora....
Cuadrados..: $\sum_i^N u_i^2 = \sum_i^N (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$
+Mínimos...: β_0 y β_1 que **minimiza** $\sum_i^N (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$
+Ordinarios... puede ser más complicado...
= **Mínimos cuadrados ordinarios (MCO)**
OLS en inglés: Ordinary Least Squares

Método de los momentos: Mínimos cuadrados ordinarios

Momentos en la población	Momentos en la muestra
$E[u] = E[y - \beta_0 - \beta_1 x] = 0$	$N^{-1} \sum_{i=1}^{N} (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) = 0$
$E[xu] = E[x(y - \beta_0 - \beta_1 x)] = 0$	$N^{-1} \sum_{i=1}^{N} x_i (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) = 0$

- Sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas... se puede resolver.
- β es un parámetro, $\hat{\beta}$ un estimador. β es un valor fijo (no lo sabemos...), $\hat{\beta}$ una variable aleatoria (depende de cada muestra...).
- Conceptos a repasar: esperanza o valor esperado $E[\cdot]$. Esperanza incondicional vs. esperanza condicional.
- Notación: $\sum_{i=1}^{N} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_N$ (sumatoria).

Consideremos las dos condiciones de primer orden, derivadas de $\sum_i^N (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$ con respecto a β_0 and β_1:

$$N^{-1} \sum_{i=1}^{N} (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) = 0 \tag{1}$$

$$N^{-1} \sum_{i=1}^{N} x_i (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) = 0 \tag{2}$$

De la primera ecuación

$$\bar{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{x} \ (\textit{demostrar})$$

- Notación: $\bar{x} = N^{-1} \sum_{i=1}^{N} x_i = N^{-1}(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n)$ (promedio)

Entonces,

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}.$$

De la segunda ecuación

$$\sum_{i=1}^{N} x_i[y_i - (\bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x}) - \hat{\beta}_1 x_i] = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} x_i(y_i - \bar{y}) = \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{N} x_i(x_i - \bar{x})$$

Finalmente,

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{N} x_i(x_i - \bar{x})} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

El siguiente resultado lo vamos a usar muchas veces:

$$\sum_{i=1}^{N} a_i(b_i - \bar{b}) = \sum_{i=1}^{N} b_i(a_i - \bar{a}) = \sum_{i=1}^{N}(a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b})$$

(¡demostrar!)

Resumiendo:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \bar{x}\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Teorema de Gauss-Markov

- Supuesto 1: Lineal en los parámetros y se relaciona con x a traves de una función lineal, $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$.
- Supuesto 2: Muestra aleatoria $\{(y_i, x_i)\}_{i=1}^N$ es una muestra aleatoria del modelo del Supuesto 1.
- Supuesto 3: Variación muestral en x: $\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \neq 0$
- Supuesto 4: Media condicional cero $E(u|x) = 0$.

MCO es insesgado *Si los Supuestos 1-4 se cumplen, entonces* $E(\hat{\beta}_0|x) = \beta_0$ *and* $E(\hat{\beta}_1|x) = \beta_1$

Teorema de Gauss-Markov

- Supuesto 5: Homoscedasticidad $Var(u|x) = \sigma^2$

Teorema de Gauss-Markov: *Si los Supuestos 1-5 se cumplen, el estimador MCO $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ es el mejor estimador insesgado de β_0, β_1. Nota: MEJOR= menor varianza (repasar concepto de varianza $V[\cdot]$). Se llama EFICIENTE a un estimador que cumple esta propiedad.*

Insesgadez

Los estimadores MCO $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ son insesgados.
Esto es, $E[\hat{\beta}_0|x] = \beta_0$ y $E[\hat{\beta}_1|x] = \beta_1$.
La prueba se puede hacer en pocos pasos.... a continuación.

Insesgadez

Para simplificar la notación escribimos $E(.)$ en vez de $E(.|x)$, o sea que las esperanzas incondicionales son en realidad esperanzas condicionales.

$$E[\hat{\beta}_1] = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}\right] = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(y_i)}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}\right]$$

por la propiedad $\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})y_i$.

$$... = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(\beta_0 + \beta_1 x_i + u_i)}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}\right]$$

by Supuesto 1: Lineal en los parámetros y se relaciona con x a través de una función lineal. O sea, $y = \beta_0 + \beta_1 x + u$.

$$... = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(\beta_0 + \beta_1 x_i + E[u_i])}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

por propiedades de la esperanza. (Notemos que $E[u_i]$ es en realidad $E[u_i|x]$.)

- $E[\sum_{i=1}^{N}(.)] = \sum_{i=1}^{N} E[(.)]$
- $E[\beta_0 + \beta_1 x_i + u_i] = \beta_0 + \beta_1 x_i + E[u_i]$

Insesgadez

Por el Supuesto 4: Media Condicional Cero $E(u|x) = 0$.

$$... = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(\beta_0 + \beta_1 x_i + 0)}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Luego de algo de álgebra...

$$... = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})\beta_0}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} + \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})\beta_1 x_i}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} = 0 + \beta_1 \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} = \beta_1$$

Entonces probamos que $E[\hat{\beta}_1] = \beta_1$

Sesgo

Probar que $E[\hat{\beta}_0|x] = \beta_0$ es más fácil.
De la primera condición de momento de MCO

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x}$$

Usando esperanzas en los dos lados,

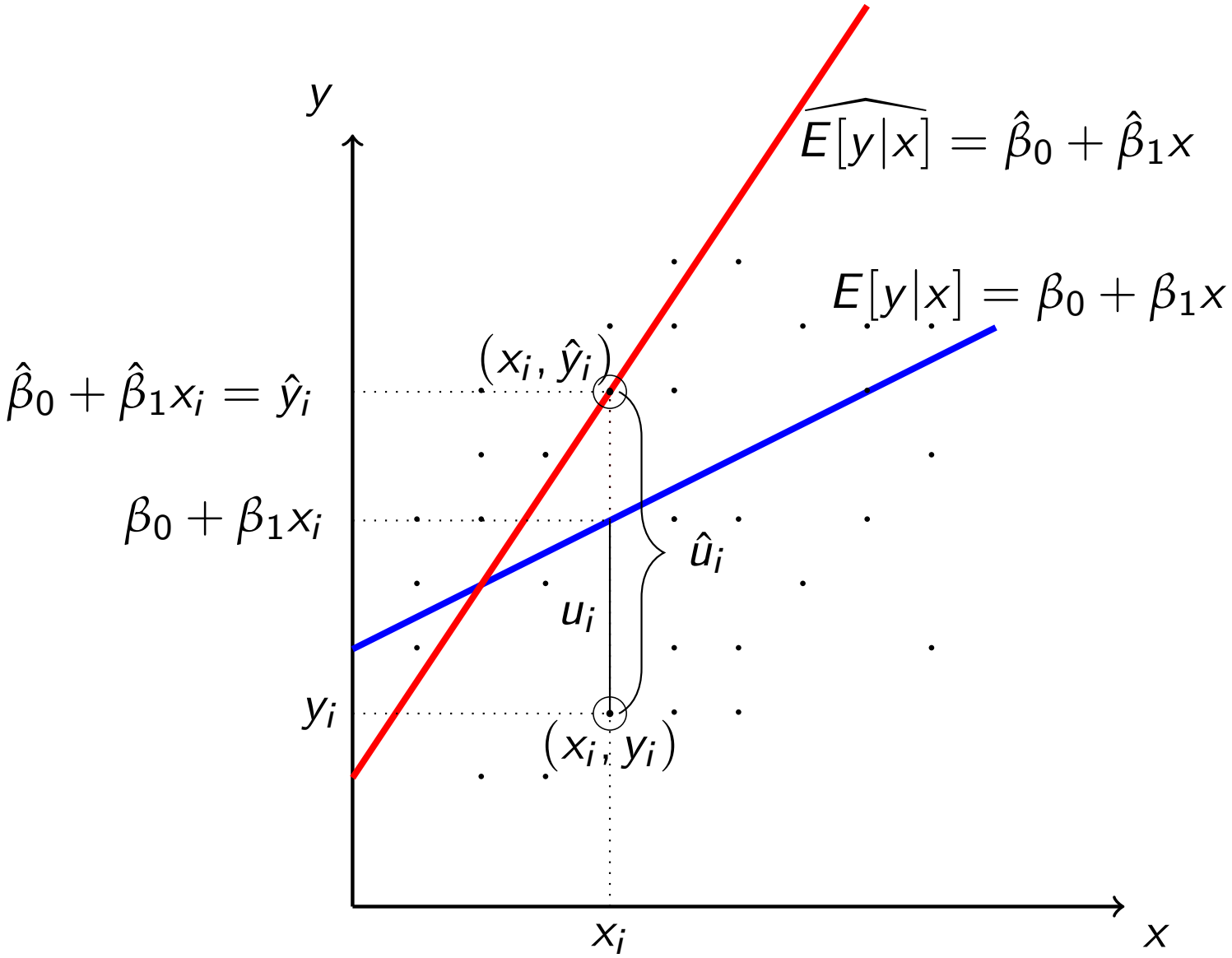
$$E[\hat{\beta}_0] = E[\bar{y}] - E[\hat{\beta}_1\bar{x}]$$

Sabemos que $E[\bar{y}] = E[\beta_0 + \beta_1\bar{x} + \bar{u}] = \beta_0 + \beta_1\bar{x} + E[\bar{u}] = \beta_0 + \beta_1\bar{x}$ y que $E[\hat{\beta}_1\bar{x}] = E[\hat{\beta}_1]\bar{x} = \beta_1\bar{x}$. Así obtenemos,

$$E[\hat{\beta}_0] = \beta_0.$$

Predicción

- $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$ es el **valor de predicción** de y dado x_i, esto es, un estimador de $E(y|x_i)$.
- $\hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i$ es el **residuo de la regresión** o **error de predicción** para la observación i, o sea un estimador de $y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i$.
- Usar gráficos para distinguir claramente $y_i, \hat{y}_i, u_i, \hat{u}_i$.


y
$\widehat{E[y|x]} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$
$E[y|x] = \beta_0 + \beta_1 x$
$(x_i, \hat{y}_i)$
$\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i = \hat{y}_i$
$\beta_0 + \beta_1 x_i$
$\hat{u}_i$
u_i
y_i
(x_i, y_i)
x_i
x

Varianza de los estimadores MCO

¡¡Todo estimador se merece su varianza!!

$$Var(\hat{\beta}_1|x) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Prueba...

$$Var(\hat{\beta}_0|x) = \frac{\sigma^2 N^{-1} \sum_{i=1}^{N} x_i^2}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Prueba...

Pregunta: $Var(\beta_1|x)$=??

Varianza de los estimadores MCO

$$Var(\hat{\beta}_1|x) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Prueba: (para simplificar la notación $var(.)$ corresponde a $var(.|x)$)

$$Var(\hat{\beta}_1) = Var\left[\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}\right] = Var\left[\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(\beta_0 + \beta_1 x_i + u_i)}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}\right]$$

$$= Var\left[\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})\beta_0}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}\right] + Var\left[\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})\beta_1 x_i}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}\right] + Var\left[\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})u_i}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}\right]$$

$$= \frac{Var\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})u_i\right]}{\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 Var[u_i]}{\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2\right)^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2\sigma^2}{\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2\right)^2} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Varianza de los estimadores MCO

Usamos

- Supuesto 1: Modelo lineal en los parámetros y se relaciona con x por una función lineal.

O sea, $y = \beta_0 + \beta_1 x + u$.

Varianza de los estimadores MCO

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Prueba:

$$Var(\hat{\beta}_1) = Var\left[\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}\right] = Var\left[\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(\beta_0 + \beta_1 x_i + u_i)}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}\right]$$

$$= Var\left[\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})\beta_0}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}\right] + Var\left[\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})\beta_1 x_i}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}\right] + Var\left[\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})u_i}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}\right]$$

$$= \frac{Var\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})u_i\right]}{\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 Var[u_i]}{\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2\right)^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2\sigma^2}{\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2\right)^2} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Varianza de los estimadores MCO

Usamos

- Propiedad de la varianza: $Var[aX + bY] = a^2 \times Var[X] + b^2 \times Var[Y] + 2ab \times Cov[X, Y]$, donde $Cov[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$
- Propiedad de la covarianza: $Cov[a, Y] = 0$, donde a es una constante y Y una variable aleatoria (también $Cov[a, b] = 0$, donde tanto a como b son constantes...)

Varianza de los estimadores MCO

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Prueba:

$$Var(\hat{\beta}_1) = Var\left[\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}\right] = Var\left[\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(\beta_0 + \beta_1 x_i + u_i)}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}\right]$$

$$= Var\left[\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})\beta_0}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}\right] + Var\left[\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})\beta_1 x_i}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}\right] + Var\left[\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})u_i}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}\right]$$

$$= 0 + 0 + \frac{Var\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})u_i\right]}{\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 Var[u_i]}{\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2\right)^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2\sigma^2}{\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2\right)^2} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Varianza de los estimadores MCO

Usamos

- Propiedad de la varianza: $Var[a] = 0$ donde a es una constante.

Las X's son consideradas como constantes.

Varianza de los estimadores MCO

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Prueba:

$$Var(\hat{\beta}_1) = Var\left[\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}\right] = Var\left[\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(\beta_0 + \beta_1 x_i + u_i)}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}\right]$$

$$= Var\left[\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})\beta_0}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}\right] + Var\left[\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})\beta_1 x_i}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}\right] + Var\left[\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})u_i}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}\right]$$

$$= \frac{Var\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})u_i\right]}{\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 Var[u_i]}{\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2\right)^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2\sigma^2}{\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2\right)^2} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Varianza de los estimadores MCO

Usamos

- Supuesto 2: Muestreo aleatorio $\{(y_i, x_i)\}_{i=1}^N$ es una muestra aleatoria del modelo dado en el Supuesto 1.

Hacemos $Var[\sum_{i=1}^N u_i] = \sum_{i=1}^N Var[u_i] + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j\neq i}^N Cov[u_i, u_j]$.

Pero, por la propiedad de muestreo aleatorio $Cov[u_i, u_j] = 0, \ i \neq j$

Entonces, $Var[\sum_{i=1}^N u_i] = \sum_{i=1}^N Var[u_i]$.

Varianza de los estimadores MCO

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Prueba:

$$Var(\hat{\beta}_1) = Var\left[\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}\right] = Var\left[\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(\beta_0 + \beta_1 x_i + u_i)}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}\right]$$

$$= Var\left[\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})\beta_0}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}\right] + Var\left[\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})\beta_1 x_i}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}\right] + Var\left[\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})u_i}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}\right]$$

$$= \frac{Var\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})u_i\right]}{\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 Var[u_i]}{\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2\right)^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2\sigma^2}{\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2\right)^2} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Varianza de los estimadores MCO

Usamos

- Supuesto 5: Homoscedasticidad $Var(u|x) = \sigma^2$

donde $Var[u_i] = Var[u_i|x] = \sigma^2$ for all $i = 1, 2, ..., n$

Varianza de los estimadores MCO

$$Var(\hat{\beta}_0) = \frac{\sigma^2 N^{-1} \sum_{i=1}^{N} x_i^2}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Prueba:

$$Var(\hat{\beta}_0) = Var\left[\bar{y} - \bar{x}\hat{\beta}_1\right] = Var\left[\bar{y}\right] + Var\left[\bar{x}\hat{\beta}_1\right] - 2Cov\left[\bar{y}, \bar{x}\hat{\beta}_1\right]$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} + \bar{x}^2 Var\left[\hat{\beta}_1\right] - 2\frac{\bar{x}}{n\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} Cov\left[\sum_{i=1}^{N} y_i, \sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})y_i\right]$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} + \bar{x}^2 \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} - 2\frac{\bar{x}}{n\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} \sigma^2 \sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} + \bar{x}^2 \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Inferencia

¡$\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ son variables aleatorias!

- Supuesto 6: Normalidad u es independiente de x y $u \sim N(0, \sigma^2)$.

Distribución normal: *Bajo los supuestos 1-6,*

$$\hat{\beta}_0 \sim N(\beta_0, Var[\hat{\beta}_0])$$

$$\hat{\beta}_1 \sim N(\beta_1, Var[\hat{\beta}_1])$$

Entonces,

$$(\hat{\beta}_0 - \beta_0)/se(\hat{\beta}_0) \sim N(0,1)$$

$$(\hat{\beta}_1 - \beta_1)/se(\hat{\beta}_1) \sim N(0,1)$$

donde $se() = \sqrt{Var()}$ *es el error estándar (s.e.).*

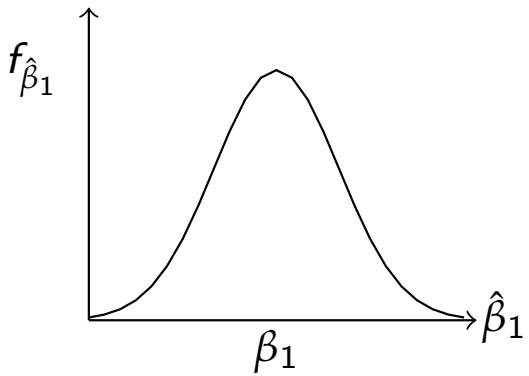
Inferencia

Prueba de normalidad de $\hat{\beta}_1$.
De la prueba de la varianza más arriba usamos el siguiente resultado algebraico

$$\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})u_i}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}.$$

Entonces, la distribución de $\hat{\beta}_1$ depende de la suma de variables aleatorias normales $(x_i - \bar{x})u_i$: la suma de normales es normal *ergo* $\hat{\beta}_1$ va a ser normal. Notar que $E[(x_i - \bar{x})u_i|x] = 0$ y $Var[(x_i - \bar{x})u_i|x] = (x_i - \bar{x})^2\sigma^2$. Por el Supuesto 2 (muestra aleatoria) $Cov(u_i, u_j) = 0, i \neq j$. De los resultados de la media $E[\hat{\beta}_1] = \beta_1$ y de la varianza se puede probar que $Var\left[\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})u_i}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}\right] = Var[\hat{\beta}_1]$.

Así, $\hat{\beta}_1 \sim N(\beta_1, Var[\hat{\beta}_1])$.



Contrastes de hipótesis (tests)

Los estimadores de MCO son variables aleatorias. Dependiendo de la muestra lo que estimamos podría estar cerca o lejos de los parámetros de la población. Lo importante es cuán cerca o lejos.
Consideremos la **hipótesis nula**

$$H_0 : \beta_1 = \beta_{10},$$

y contrastemos con la **hipótesis alternativa**

$$H_A : \beta_1 > \beta_{10} \quad o \quad H_A : \beta_1 < \beta_{10} \quad o \quad H_A : \beta_1 \neq \beta_{10}$$

(una dirección, dos direcciones)
Un ejemplo muy usado es $H_0 : \beta_1 = 0$. ¿Hay relación de x con y? Si la pendiente es cero entonces no hay relación. Esto corresponde a analizar la **significatividad** de la variable x.
En la práctica tenemos que hacer inferencia acerca de si H_0 es verdad o no usando $\hat{\beta}_1$.

Contrastes de hipótesis (tests)

Si H_0 es verdad, entonces $\hat{\beta}_1$ debería estar cerca de β_{10}. Pero ¿por cuánto? ¿Cuán cerca es cerca?

Bajo $H_0 : \beta_1 = \beta_{10}$ y asumiendo que u tiene distribución normal $N(0, \sigma^2)$, tenemos el siguiente resultado importante

$$\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_{10}}{\widehat{se(\hat{\beta}_1)}} \sim t_{N-2}$$

donde $se(.)$ son los errores estándar (standard errors) y t_{N-2} es la distribución "t de estudiante" (t-Student) con $N-2$ grados de libertad. Por otro lado $\widehat{se(\hat{\beta}_1)} = \sqrt{\widehat{Var(\hat{\beta}_1)}}$ es el estimador del error estándar.

Nota: Para obtener $Var(\hat{\beta}_1)$ necesitamos estimar σ^2, la varianza del error. Usamos $\hat{\sigma}^2$.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} \hat{u}_i^2}{N-2}$$

El número 2 de los grados de libertad dice cuántos parámetros estamos estimando.

Contrastes de hipótesis (tests)

- Paso 1: ¿Qué hipótesis?

  En general queremos ver la significatividad estadística (**statistical significance**) de un coeficiente de regresión. O sea, $H_0 : \beta_1 = 0$ en el modelo $y = \beta_0 + \beta_1 x + u$.

  También puede haber hipótesis nulas compuestas $H_0 : \beta_2 = 0, \beta_3 = 0$ en el modelo (ver más adelante)

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 \, x_2 + \beta_3 \, x_3 + u$$

Contrastes de hipótesis (tests)

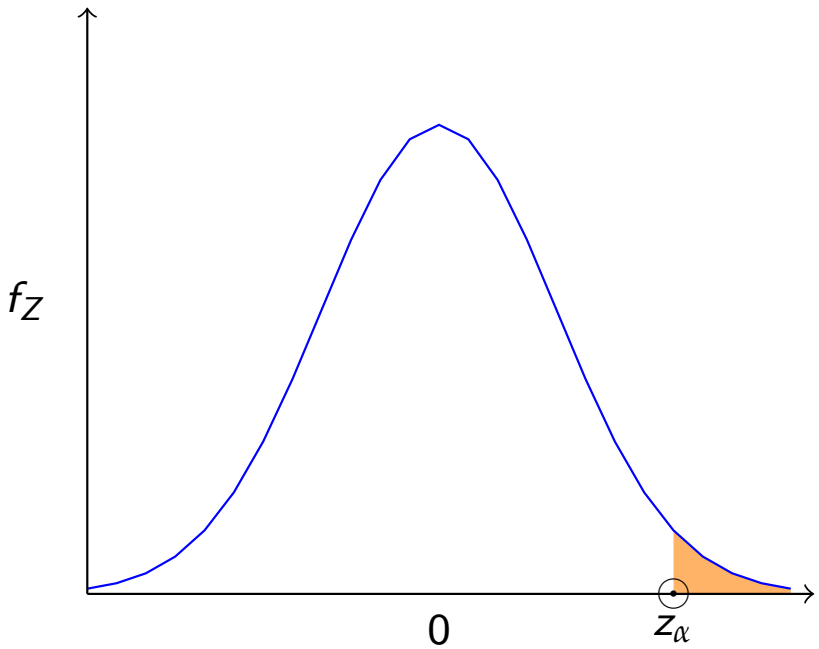
- Paso 2: Nivel de significancia, α. En general, se aceptan estos valores: $\alpha = .1$, $\alpha = .05$, $\alpha = .01$
  Cuanto mas pequeño es α mas confianza se tiene en los resultados. Estos niveles se eligen de acuerdo a los *usos y costumbres* del area de estudio. $\alpha = .05$ es el más usado.

En Estadística se llama **Error de Tipo I** *al error de rechazar H_0 cuando es verdadera. Dado que estamos trabajando con variables aleatorias siempre podemos cometer errores. α es este error.*

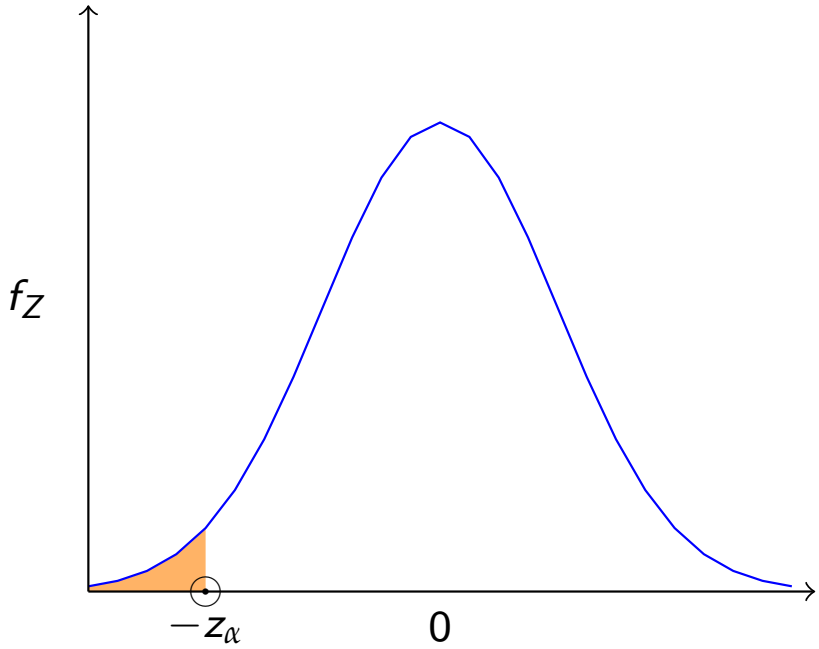
Bajo H_0, $S = \hat{\beta}_1 - \beta_{10}$ debería estar cercano a 0. Entonces, la evidencia de que esto no es cierto debería estar asociado a un alto valor de S. Llamemos a S_α o $S_{\alpha/2}$ a los valores críticos.
- Modelo en **una dirección**: $H_A : \beta_1 > \beta_{10}$ (o $H_A : \beta_1 < \beta_{10}$). Entonces tenemos $P[S > S_\alpha] = \alpha$ (o $P[S < S_\alpha] = \alpha$).
- Modelo en **dos direcciones**: $H_A : \beta_1 \neq \beta_{10}$. Entonces tenemos dos valores críticos tal que $P[S > S^1_{\alpha/2} > 0] = \alpha/2$ y $P[S < S^2_{\alpha/2} < 0] = \alpha/2$. Si la distribución de S es simétrica, $S^1_{\alpha/2} = -S^2_{\alpha/2}$.

Modelo en una dirección: $H_0 : \beta_1 = \beta_{10}$, $Z = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_{10}}{\sqrt{\widehat{\hat{\beta}_1}}}$

$H_A : \beta_1 > \beta_{10}$
$P[Z > z_\alpha] = \alpha$



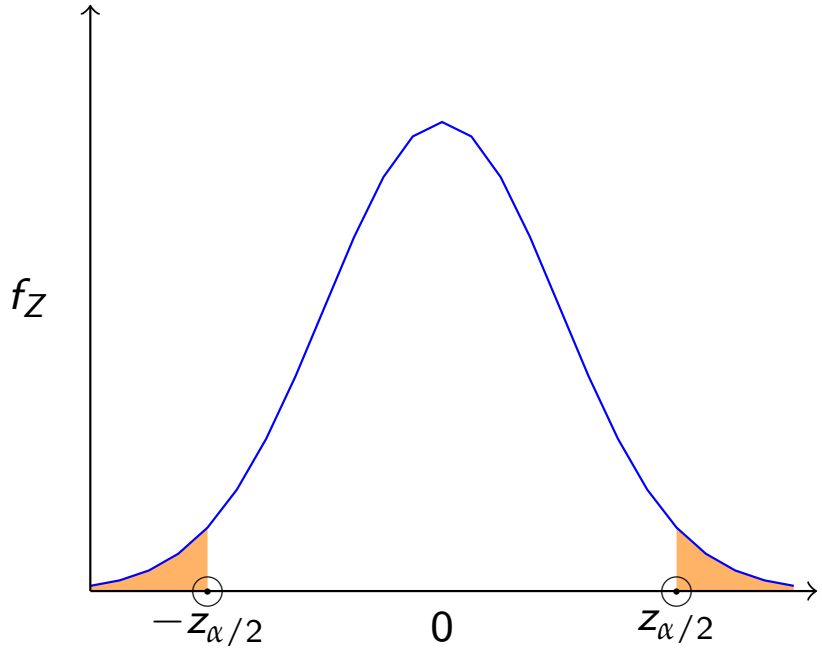
$H_A : \beta_1 < \beta_{10}$
$P[Z < -z_\alpha] = \alpha$



El nivel de significancia (para el caso de rechazo en una dirección) corresponde al area naranja. En este caso α es la probabilidad en una cola de la distribución.

Modelo en dos direcciones: $H_0 : \beta_1 = \beta_{10}$, $H_A : \beta_1 \neq \beta_{10}$, $Z = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_{10}}{\sqrt{\widehat{\hat{\beta}_1}}}$,

$P[|Z| > z_{\alpha/2}] = \alpha$



El nivel de significancia (para el caso de rechazo en dos direcciones) corresponde al area naranja. En este caso α es la probabilidad en las colas de la distribución.

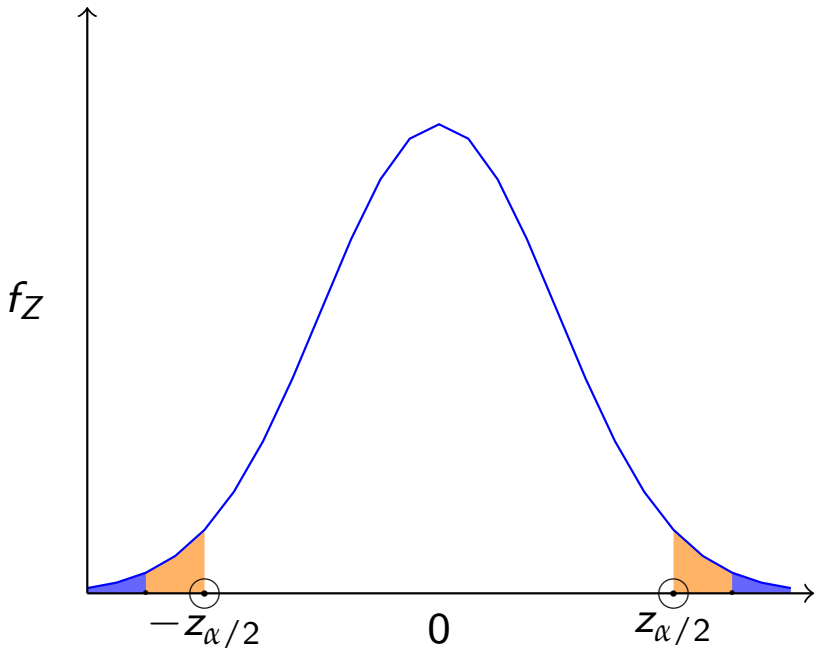
Contrastes de hipótesis (tests)

- Paso 3: Mirar el $p - valor$.
- El p-valor (para hipótesis en dos direcciones) es $P[|\hat{\beta}_1 - \beta_{10}| > |\hat{\beta}_1^{obs} - \beta_{10}|]$ bajo la hipótesis nula, donde $\hat{\beta}_1^{obs}$ es el valor observado, es decir, en la muestra, y $\hat{\beta}_1$ la variable aleatoria dada por el estimador.
- Intuitivamente nos dice que probabilidad hay de encontrar un valor que nos de más evidencia de rechazo que el realmente observado. Si esta probabilidad es pequeña, entonces tenemos un valor muy distinto al que se asume en H_0.
  REGLA:
- Si $p - valor < \alpha$ entonces **rechazar** la hipótesis nula.
- Si $p - valor \geq \alpha$ entonces **aceptar** (propiamente dicho no rechazar) la hipótesis nula.

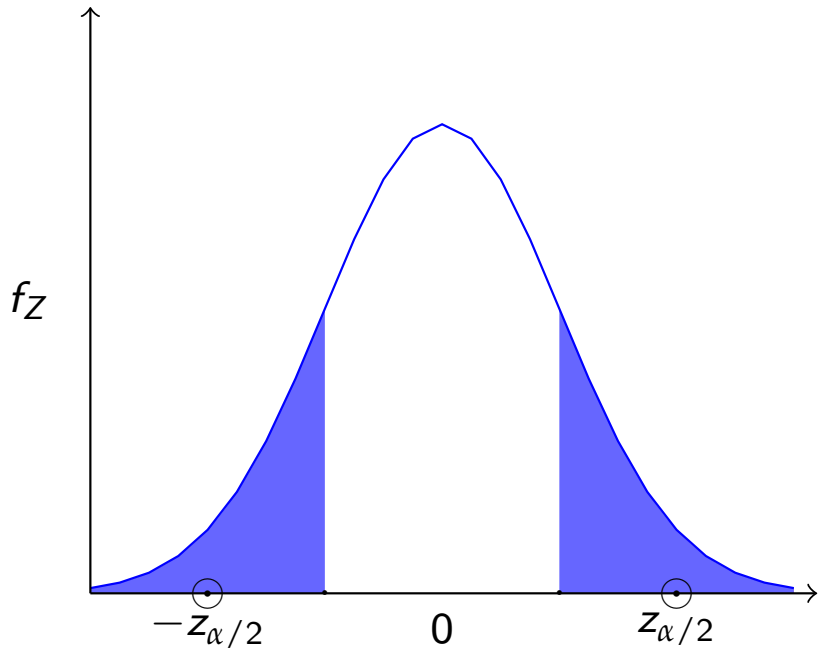
Modelo en dos direcciones: $H_0 : \beta_1 = \beta_{10}$, $H_A : \beta_1 \neq \beta_{10}$, $Z = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_{10}}{\sqrt{\widehat{\hat{\beta}_1}}}$,

$P[|Z| > z_{\alpha/2}] = \alpha$, $z^{obs} = \frac{\hat{\beta}_1^{obs} - \beta_{10}}{\sqrt{\widehat{\hat{\beta}_1}}}$

$|z^{obs}| > z_{\alpha/2}$



$|z^{obs}| < z_{\alpha/2}$



El p-valor corresponde al area azul en cada figura, $P[|Z| > |z^{obs}|] = p - valor$. En la figura derecha se rechaza la hipótesis nula, en la figura izquierda no.

Contrastes de hipótesis (tests)

- Ejemplo: Si la hipótesis nula es $H_0 : \beta_1 = 0$ en el modelo $y = \beta_0 + \beta_1 x + u$, entonces
- Si $p - valor < \alpha$, **rechazar** $\Rightarrow \beta_1 \neq 0$, x tiene un efecto lineal sobre y. **Se dice que x es estadísticamente signficativa.**
- Si $p - valor \geq \alpha$, **aceptar** $\Rightarrow \beta_1 = 0$, x no tiene efecto lineal sobre y. **Se dice que x no es estadísticamente signficativa.**

Contrastes de hipótesis (tests)

- Si la hipótesis es $H_0 : \beta_2 = 0, \beta_3 = 0$ para modelos de regresión múltiple (ver más adelante) $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + u$, entonces
- Si $p - valor < \alpha$, **rechazar** $\Rightarrow \beta_2 \neq 0$ *o* $\beta_3 \neq 0$, x_2 y x_3 tienen **conjuntamente** un efecto lineal sobre y. **Se dice que x_2 y x_3 son estadísticamente signficativas.**
- Si $p - valor \geq \alpha$, **aceptar** $\Rightarrow \beta_2 = 0$ *y* $\beta_3 = 0$, x_2 y x_3 no tienen un efecto lineal sobre y. **Se dice que x_2 y x_3 no son estadísticamente signficativas.**

Contrastes de hipótesis (tests)

- Paso 3 (alternativo): Mirar el estimador dividido el error estándar. Muchos trabjos empíricos reportan los coeficientes estimados y los errores estándar de esos estimadores. La idea es que $\frac{\hat{\beta}_1}{se(\hat{\beta}_1)}$ tiene aproximadamente una distribución normal, y para un $\alpha = 0.05$ el valor crítico es 2 (en una variable aleatoria $Z \sim N(0,1)$, $P[Z > 1.96] = 0.025$.
  REGLA:
- Si $\frac{\hat{\beta}_1}{se(\hat{\beta}_1)} > 2$ entonces **rechazar** la hipótesis nula. **Se dice que x es estadísticamente signficativa.**
- Si $\frac{\hat{\beta}_1}{se(\hat{\beta}_1)} \leq 2$ entonces **aceptar** la hipótesis nula. **Se dice que x no es estadísticamente signficativa.**

Ejemplo: Retornos a la educación

$$wage = \beta_0 + \beta_1 educ + u$$

1976 Current Population Survey (CPS) de los Estados Unidos

use http://fmwww.bc.edu/ec-p/data/wooldridge/wage1, clear
(para abrir la base de datos)

reg wage educ (para correr la regresión)

Ejemplo: Retornos a la educación

$$\begin{array}{rcc} wage = & -.905+ & .541^{***}\,educ \\ & (.685) & (.053) \\ & < 0.187 > & < 0.000 > \\ & [-1.321] & [10.2] \end{array}$$

(errores estándar); $< p-valor >$; $[t-valor]$; * significancia 10%; ** significancia 5%; *** significancia 1%;

- ¿Qué significa $\hat{\beta}_1 = .541$? cada año de educación incrementa el salario horario en promedio 54 centavos de dólar.
- ¿Es estadísticamente significativo? Ver el p-valor.
  Esto tiene implícita la hipótesis $H_0 : \beta_1 = 0$. $se(\hat{\beta}_1) = .053$,
  $\frac{\hat{\beta}_1}{se(\hat{\beta}_1)} = \frac{.541}{.053} = 10.2$. Rechazar con el p-valor de 0.000.
- ¿Qué significa $\hat{\beta}_0 = -.905$? ¿Es significativo?

¿Cómo aparecen los resultados en STATA?

http://fmwww.bc.edu/gstat/examples/wooldridge/wooldridge2.html

Otros comandos en STATA

- Para obtener estadísticos de la base de datos tipear:
  `summ`
  (reporta para todas las variables: nro. de observaciones, promedio, desviaciones estándar, mínimo, máximo)
  `summ wage educ`
  (sólo para las variables especificadas)
- Más información para una variable (mediana, cuantiles, asimetría, curtosis)
  `summ wage, detail`
  (en wage va la variable de interés)
- Valor predicho, $\hat{y}$, de una regresión,
  `reg wage educ`
  `predict wagehat`
  (en wagehat va el nombre que se le quiere dar a la nueva variable)
  (nota: antes hay que correr la regresión)
- Residuos de la regresión, $\hat{u} = y - \hat{y}$
  `predict wageresid, resid`
  (en wageresid va el nombre que se le quiere dar a la nueva variable)

Gráficos en STATA

- Nube de puntos
  `scatter wage educ`
  (wage es la variable del eje vertical, educ es la variable del eje horizontal)
- Línea (conecta los puntos)
  `sort educ`
  `line wagehat educ`
  (wage es la variable del eje vertical, educ es la variable del eje horizontal)

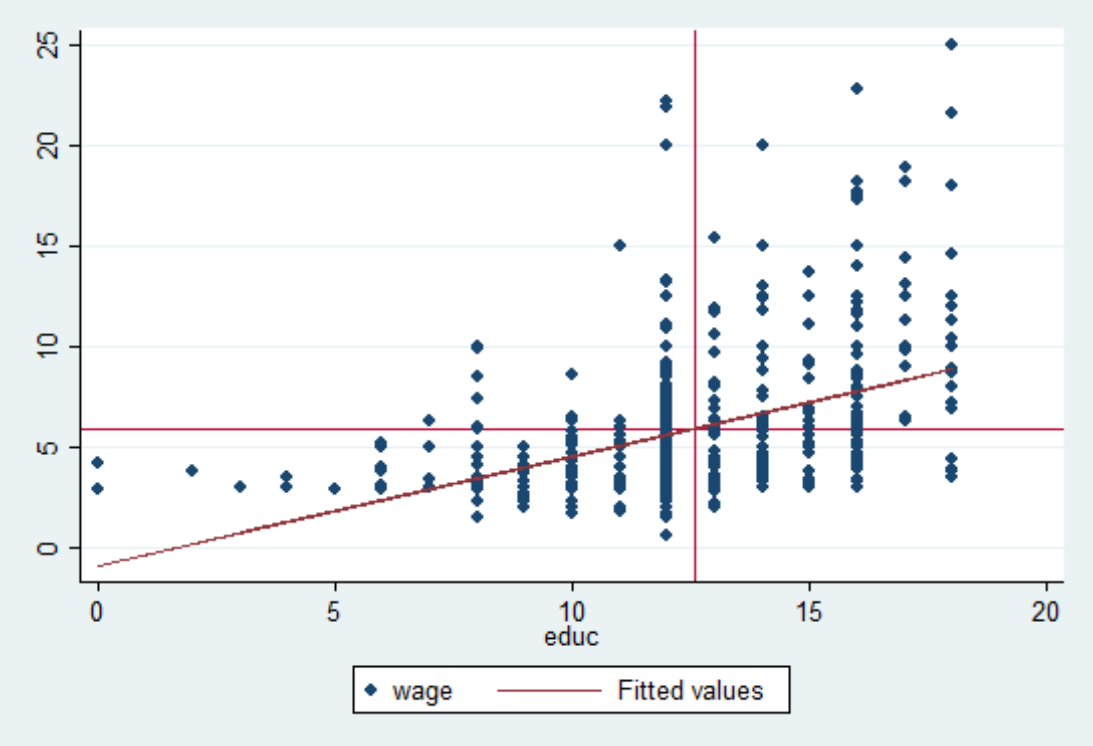
Ejemplo:

reg wage educ

predict wagehat (para predecir los salarios, $\widehat{wage} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 educ$)

scatter wage educ || line wagehat educ, xline(12.57) yline(5.90)

(hace un gráfico con la nube de puntos y la línea de regresión)



Simulación en STATA

¿Cḿo simular datos de una regresión?

Vamos a simular una muestra de datos $\{y_i, x_i\}_{i=1}^{N}$ para $y_i = \beta_0 + \beta 1 x_i + u_i$ con $\beta_0 = \beta_1 = 1$ con $x_i \sim$ *iid Normal*$(0,1)$, $u_i \sim$ *iid Normal*$(0,1)$, y con $N = 100$.

```
clear
gl N=100
set obs $N
gl beta0=1
gl beta1=1
gen u=rnormal(0,1)
gen x=rnormal(0,1)
gen y=$beta0+$beta1*x+u
reg y x
```

Estos datos no son replicables, cada simulación va a dar diference. Para que sea replicable hay que especificar una "semilla". Para so hay que poner al principio:

```
set seed 1
```