

Series de tiempo I

Procesos univariados y estacionarios

Gabriel V. Montes-Rojas

La estructura de las series temporales

- **Series temporales** Información para diferentes periodos indexados por el tiempo t , pero para el mismo individuo (país, firma)
 $\{y_t, x_t\}_{t=1}^T$, donde t indica tiempo.
Ej: Inflación. Precio del barril de petróleo. PBI.
- La estructura temporal es importante: el pasado afecta el presente (y el futuro) pero no al revés.
- En un modelo de regresión:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + u_t, t = 1, 2, \dots, T$$

$\{u_t\}_{t=1}^T$ puede que no sea *i.i.d.* (independiente e idénticamente distribuido).

Correlación serial de los errores en regresión.

- Operador de rezagos o lags, L : $Ly_t = y_{t-1}$, $L^2 y_t = y_{t-2}$.
- Operador de diferencias, Δ : $\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = (1 - L)y_t$.

Series temporales lineales

La serie temporal más simple se llama **ruido blanco**:

$\{e_t\}$ es ruido blanco si es una secuencia de variables aleatorias i.i.d. (independientes e idénticamente distribuidas) con

- 1 $E[e_t] = 0, \forall t$
- 2 $Var[e_t] = \sigma_e^2, \forall t.$

Una serie de tiempo es **lineal** si

$$y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i e_{t-i},$$

donde $\psi_0 = 1$ y $\{e_t\}$ es ruido blanco. e_t es la nueva información que se adquiere en t , también llamada innovación o shock. ψ son los “pesos” de las innovaciones del pasado en el presente.

- **Ejercicio:** Calcular $E[y_t]$, $Var[y_t]$ y $Cov[y_t, y_{t-j}]$, $j = 0, 1, 2, \dots$

Procesos autorregresivos AR(1)

Consideremos un proceso autorregresivo de orden 1, AR(1)

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + e_t, t = 1, 2, \dots$$

donde $\{e_t : t = 0, 1, \dots\}$ es una secuencia de errores ruido blanco.
Asumamos que $|\phi_1| < 1$.

Procesos autorregresivos AR(1)

Notar que estos procesos tienen memoria infinita, es decir, el valor actual depende de todos los shocks pasados. Veamos:

$$\begin{aligned}y_t &= \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + e_t = \phi_0 + \phi_1(\phi_0 + \phi_1 y_{t-2} + e_{t-1}) + e_t \\&= \phi_0(1 + \phi_1) + \phi_1^2 y_{t-2} + e_t + \phi_1 e_{t-1} \\&= \phi_0(1 + \phi_1) + \phi_1^2(\phi_0 + \phi_1 y_{t-3} + e_{t-2}) + e_t + \phi_1 e_{t-1} \\&= \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j (\phi_0 + e_{t-j}) = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1} + \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j e_{t-j}\end{aligned}$$

Nota: Dado que $|\phi_1| < 1$, entonces $\sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j \phi_0 = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1}$.

Procesos autorregresivos AR(1)

Probar que:

$$E[y_t] = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1}$$

$$\text{Var}[y_t] = \frac{\sigma_e^2}{1 - \phi_1^2}$$

Hay varias formas de probarlo. (i) Una es usando la ecuación de memoria infinita, $y_t = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1} + \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j e_{t-j}$, aplicando esperanza y varianza. (ii) Otra es asumir estacionariedad, que veremos más adelante, pero que implica que $E[y_t] = E[y_{t-1}] = E[y_{t-2}] = \dots$ y que $\text{Var}[y_t] = \text{Var}[y_{t-1}] = \text{Var}[y_{t-2}] = \dots$ entonces se puede resolver en una ecuación.

Procesos autorregresivos AR(1)

Definamos la **función de autocovarianzas de k rezagos** como

$$\gamma_k = \text{Cov}[y_t, y_{t-k}] = \text{Cov}[y_t, y_{t+k}].$$

(Nota: repasar las propiedades de varianzas y covarianzas vistas en la primera parte del curso.)

- $\gamma_0 = \text{Cov}[y_t, y_t] = \text{Var}[y_t] = \frac{\sigma_e^2}{1-\phi_1^2}$
- $\gamma_1 = \text{Cov}[y_{t-1}, y_t] = \text{Cov}[y_{t-1}, \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + e_t] = \phi_1 \gamma_0 = \frac{\phi_1 \sigma_e^2}{1-\phi_1^2}$
- $\gamma_2 = \text{Cov}[y_{t-2}, y_t] = \text{Cov}[y_{t-2}, \phi_0(1 + \phi_1) + \phi_1^2 y_{t-2} + e_t + \phi_1 e_{t-1}]$
 $= \phi_1^2 \gamma_0 = \frac{\phi_1^2 \sigma_e^2}{1-\phi_1^2}$
- $\gamma_k = \phi_1^k \gamma_0 = \frac{\phi_1^k \sigma_e^2}{1-\phi_1^2}$

Procesos autorregresivos AR(1)

- Definir $x_t = y_t - E[y_t]$. Notar que el AR(1) se puede escribir como $x_t = \phi_1 x_{t-1} + e_t$. Entonces, tenemos que $E[x_t^2] = \text{Var}[y_t] = \gamma_0$. Por otro lado, si multiplicamos por x_{t-1} la ecuación anterior, $x_t x_{t-1} = \phi_1 x_{t-1}^2 + x_{t-1} e_t$, $\gamma_1 = E[x_t x_{t-1}] = \phi_1 E[x_{t-1}^2] + E[x_{t-1} e_t] = \phi_1 \gamma_0$. Esto lo podemos repetir para x_{t-2} , x_{t-3} , etc.
- Definamos la **función de autocorrelación** como $\rho_k = \gamma_k / \gamma_0$. Para el AR(1) es $\rho_k = \phi_1^k$.

Procesos autorregresivos AR(2)

Procesos autorregresivos de orden 2, AR(2)

Supongamos ahora un proceso AR(2),

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + e_t,$$

donde $\{e_t : t = 0, 1, \dots\}$ es una secuencia de errores ruido blanco.

Ejercicio: Resolver las fórmulas de $E[y_t]$, $Var[y_t]$, γ_k , ρ_k .

Prueba: Asumir estacionariedad y resolver $E[y_t] = \phi_0 / (1 - \phi_1 - \phi_2)$. Definir $x_t = y_t - E[y_t]$, tal que $x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + e_t$. Multiplicando por x_t, x_{t-1}, x_{t-2} , tenemos las ecuaciones de Yule-Walker:

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \sigma_e^2 \\ \gamma_1 &= \phi_1 \gamma_0 + \phi_2 \gamma_1 \\ \gamma_2 &= \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_0.\end{aligned}$$

tres ecuaciones con tres incógnitas. Sino también

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 \\ \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2.\end{aligned}$$

Procesos autorregresivos AR(p)

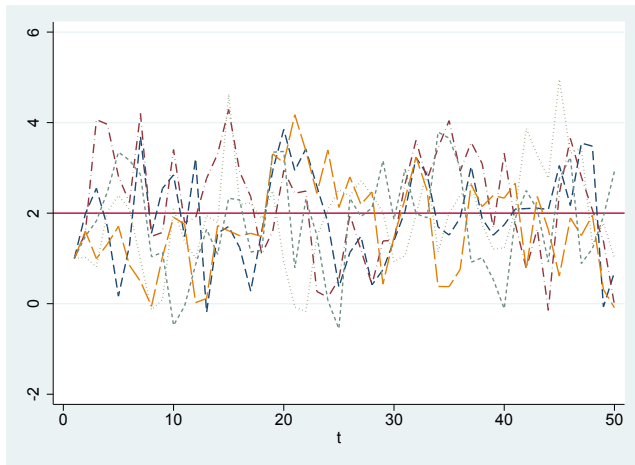
Procesos autorregresivos de orden p, AR(p)

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + e_t, t = p, p+1, \dots$$

donde $\{e_t : t = 0, 1, \dots\}$ es una secuencia de errores ruido blanco.

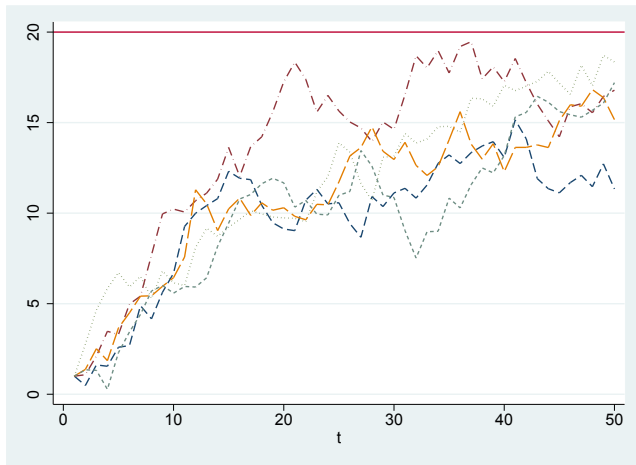
Simulación de 5 procesos AR(1)

$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + e_t, t = 1, 2, \dots, 50, \phi_0 = 1, \phi_1 = 0.5, y_0 = 1, e_t \sim iid N(0, 1)$



Simulación de 5 procesos AR(1)

$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + e_t, t = 1, 2, \dots, 50, \phi_0 = 1, \phi_1 = 0.95, y_0 = 1, e_t \sim iid N(0, 1)$



Promedios móviles MA(1)

Promedios móviles de orden 1 MA(1) (MA:moving average)

$$y_t = \alpha_0 + e_t + \alpha_1 e_{t-1}, t = 1, 2, \dots$$

donde $\{e_t : t = 0, 1, \dots\}$ es ruido blanco.

Nota: y_t es un **promedio ponderado** de e_t y e_{t-1} .

Promedios móviles

Promedios móviles de orden q MA(q)

$$y_t = \alpha_0 + e_t + \alpha_1 e_{t-1} + \alpha_2 e_{t-2} + \alpha_3 e_{t-3} \dots + \alpha_q e_{t-q}, \quad t = q, q+1, \dots,$$

donde $\{e_t : t = 0, 1, \dots\}$ es ruido blanco.

Promedios móviles

Promedios móviles de orden MA(q)

$$E[y_t] = \alpha_0$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[y_t] &= \sigma_e^2 + \alpha_1^2 \sigma_e^2 + \dots + \alpha_q^2 \sigma_e^2 \\ &= \sigma_e^2 (1 + \alpha_1^2 + \dots + \alpha_q^2) \end{aligned}$$

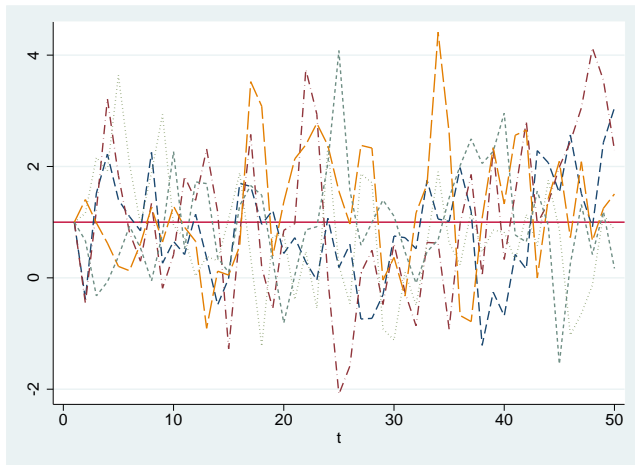
Propiedad de los procesos MA(q):

$$\text{Cov}[y_t, y_{t-k}] \neq 0, \text{ si } k \leq q$$

$$\text{Cov}[y_t, y_{t-k}] = 0, \text{ si } k > q$$

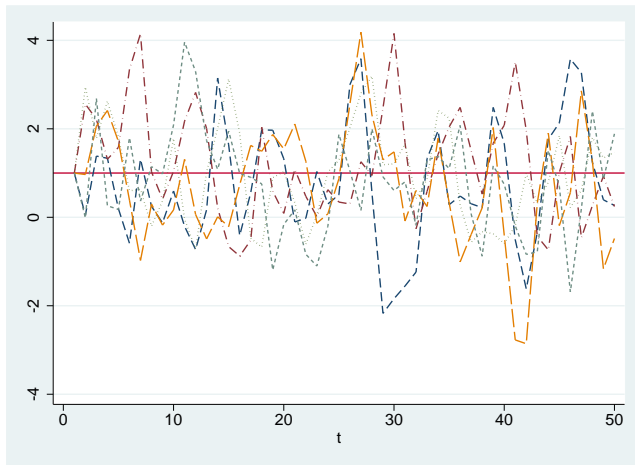
Simulación de 5 procesos MA(1)

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1} + e_t, t = 1, 2, \dots, 50, \alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0.5, y_0 = 1, e_t \sim iid N(0, 1)$$



Simulación de 5 procesos MA(1)

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1} + e_t, t = 1, 2, \dots, 50, \alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0.95, y_0 = 1, e_t \sim iid N(0, 1)$$



Procesos ARMA

Un proceso $ARMA(p, q)$ se define como

$$y_t = \phi_0 + \sum_{j=1}^p \phi_j y_{t-j} + e_t + \sum_{j=1}^q \alpha_j e_{t-j}$$

donde $\{e_t\}$ es ruido blanco.

¿Cómo usar series temporales en STATA?

- Organizar los datos correctamente en Excel. Luego copiar & pegar a STATA.

| TIME | YVAR | XVAR |
|------|-------|-------|
| 1 | y_1 | x_1 |
| 2 | y_2 | x_2 |
| 3 | y_3 | x_3 |

- Tipear
tsset TIME esto reconoce TIME como t , el indicador del tiempo
[Ver <http://www.stata.com/help.cgi?tsset>]
- Para usar variables con rezagos/lags se debe usar L. para $t - 1$, L2. para $t - 2$, etc. (o sea L_j para $j=1,2,3,\dots$) Por ejemplo L.YVAR corresponde a $YVAR_{t-1}$.
- Para usar variables en (primeras) diferencias se debe usar D. Por ejemplo, D.YVAR corresponde a $\Delta YVAR_t = YVAR_t - YVAR_{t-1}$. [Se puede combinar D. y L.]
- Ejemplo: regresión para AR(2): reg YVAR L.YVAR L2.YVAR
- Modelo ARMA(p, q): arima YVAR, arima($p, 0, q$)

Contrastes para ruido blanco

Supongamos el siguiente contraste:

$H_0 : y_t$ sigue un ruido blanco

$H_A : y_t$ no sigue un ruido blanco

En STATA:

wntestb YVAR (Contraste de Bartlett)

wntestq YVAR (Contraste de Portmanteau)

Estacionariedad estricta

Procesos estrictamente estacionarios: *El proceso $\{y_t : t = 1, 2, \dots\}$ es estrictamente estacionario si para cada colección de índices de tiempo $1 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_m$, la distribución conjunta $(y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_m})$ es la misma que la de $(y_{t_1+h}, y_{t_2+h}, \dots, y_{t_m+h})$ para todo $h \geq 1$.*

- En otras palabras, la distribución es invariante en el tiempo no importa de que tiempo t estemos hablando.
- Es un supuesto fuerte.
- Ejercicio: Probar que los procesos AR(1) y MA(1) usados arriba satisfacen esta propiedad.

Estacionariedad débil

Procesos de estacionariedad débil: *El proceso $\{y_t : t = 1, 2, \dots\}$ con momento segundo finito $E[y_t^2] < \infty$ es débilmente estacionario si (i) $E[y_t]$ es constante; (ii) $\text{Var}[y_t]$ es constante; y (iii) para cualquier $t, h \geq 1$, $\text{Cov}[y_t, y_{t+h}]$ depende solo de h pero no de t .*

- Nota: estacionariedad estricta implica estacionariedad débil.
- Ejercicio: Probar que los procesos AR(1) y MA(1) usados arriba satisfacen esta propiedad.

Procesos débilmente dependientes

Procesos débilmente dependientes: *El proceso estocástico $\{y_t : t = 1, 2, \dots\}$ es débilmente dependiente si y_t y y_{t+h} se vuelven independientes (leer la covarianza es 0) cuando $h \rightarrow \infty$. O sea: $Cov[y_t, y_{t+h}] \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow \infty$ (no correlacionados asintóticamente)*

- Ejercicio: probar que los procesos AR(p) y MA(q) son débilmente dependientes.



'Todas las familias felices se parecen entre sí; las infelices son desgraciadas en su propia manera.'

Leo Tolstoy (1828-1910)

'Todas las series estacionarias se parecen entre sí; las no estacionarias son desgraciadas en su propia manera.'

¿Por qué es importante la estacionariedad?

- Para estimar y hacer inferencia sobre el proceso generador de los datos necesitamos del pasado. Necesitamos que el pasado se mantenga “parecido” al presente para que nuestras estimaciones tengan sentido hoy, y para predecir hacia el futuro.
- Antes de empezar a calcular medias, varianzas y covarianzas tenemos que asegurarnos que la serie es estacionaria. En general se busca estacionariedad débil.
- Los “sospechosos de siempre” para chequear estacionariedad
 - Análisis subjetivo en base a gráficos y funciones de correlación y correlación parcial (ver notas sobre caracterización de series estacionarias, próximo tópico)
 - Contrastes formales de raíces unitarias (ver notas sobre contrastes de raíces unitarias)
 - Tendencias (ver notas sobre tendencias y ciclos)
 - Cambios estructurales (ver notas sobre Contrastes de Chow)

¿Por qué es importante la estacionariedad?

Consideremos un proceso que sigue un **paseo aleatorio** un típico ejemplo de serie no estacionaria:

$$y_t = y_{t-1} + e_t, t = 1, 2, \dots, e_t \sim i.i.d.(0, \sigma_e^2)$$

Este proceso tiene la propiedad

$$E[y_{t+h}|y_t] = y_t, \forall h \geq 1 \quad (1)$$

Esto significa que el proceso no revierte a la media y por lo tanto no es predecible. [En contraste con AR(1) $E[y_{t+h}|y_t] = \phi_1^h y_t \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow \infty$ (revierte a la media).]

Este es un caso especial de un proceso de **raíz unitaria** porque $\phi_1 = 1$ en un AR(1). (Ver notas sobre contrastes de raíces unitarias)

¿Por qué es importante la estacionariedad?

Un paseo aleatorio se puede escribir como

$$y_t = e_t + e_{t-1} + \dots + e_1 + y_0$$

Entonces,

$$E[y_t] = E[e_t] + E[e_{t-1}] + \dots + E[e_1] + E[y_0] = E[y_0]$$

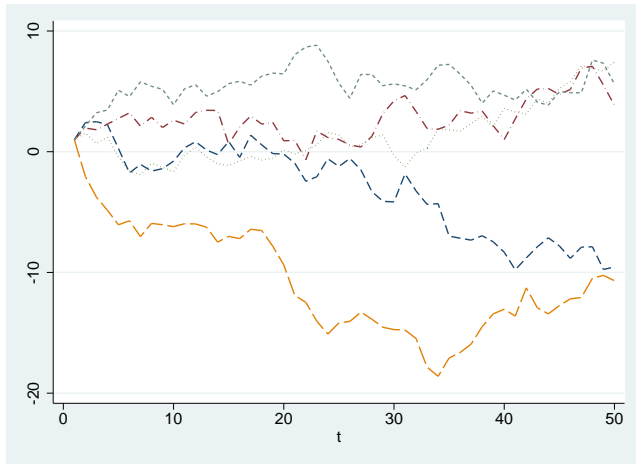
$$\text{Var}[y_t] = \text{Var}[e_t] + \text{Var}[e_{t-1}] + \dots + \text{Var}[e_1] = t\sigma_e^2$$

(note que la varianza $\rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$)

$$\text{Cov}[y_t, y_{t-k}] = (t-k)\sigma_e^2$$

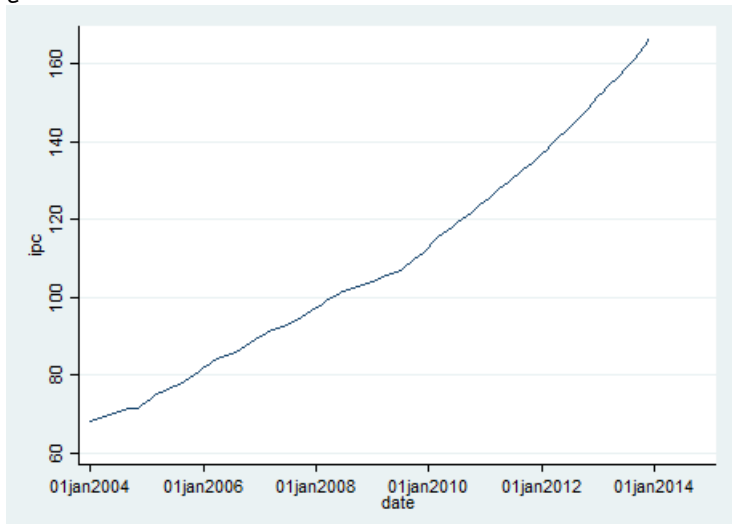
Simulación de 5 paseos aleatorios

$$y_t = y_{t-1} + e_t, t = 1, 2, \dots, 50, y_0 = 1, e_t \sim iid N(0, 1)$$



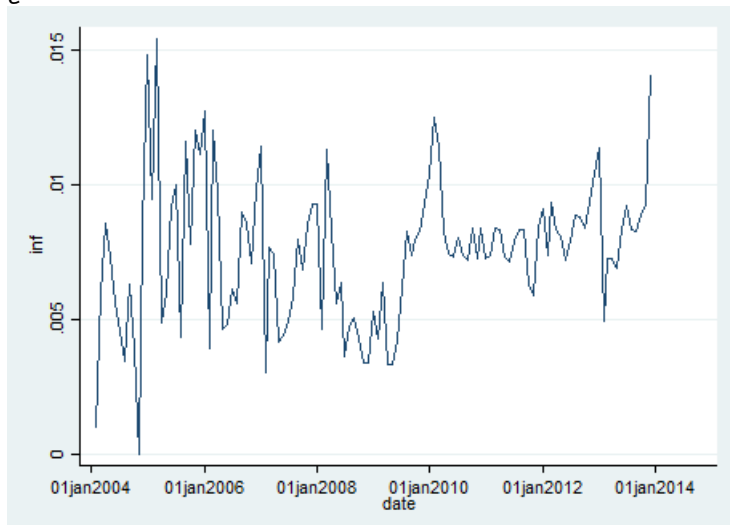
Indice de Precios al Consumidor GBA, base abril 2008=100

¿Es estacionaria o no estacionaria?



Inflación mensual, en base a IPC

¿Es estacionaria o no estacionaria?



Caracterización de series temporales

¿Cómo identificar el orden de una serie temporal?

- Para procesos MA usar la **función de autocorrelación**.
- Para procesos AR usar la **función de autocorrelación parcial**.
- Para procesos ARMA es más complicado... **función de autocorrelación extendida** (ver libro de Tsay, p.66)
- Criterios de información

La función de autocorrelación

$$\rho_k \equiv \frac{\text{Cov}[y_t, y_{t+k}]}{\text{Var}[y_t]} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

(note que $\rho_0 = 1$)

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=1}^{T-k} (y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^{T-k} (y_t - \bar{y})^2}$$

La función de autocorrelación

- Considere la hipótesis $H_0 : \rho_k = 0$. Bajo la hipótesis nula $\hat{\rho}_k \sim N(0, 1/T)$ (resultado de Bartlett).
- Considere la hipótesis $H_0 : \rho_k = 0$ all $k = 1, 2, \dots, K$. Bajo la hipótesis nula $Q = T \sum_{k=1}^K \hat{\rho}_k^2 \sim \chi_K^2$.

En STATA:

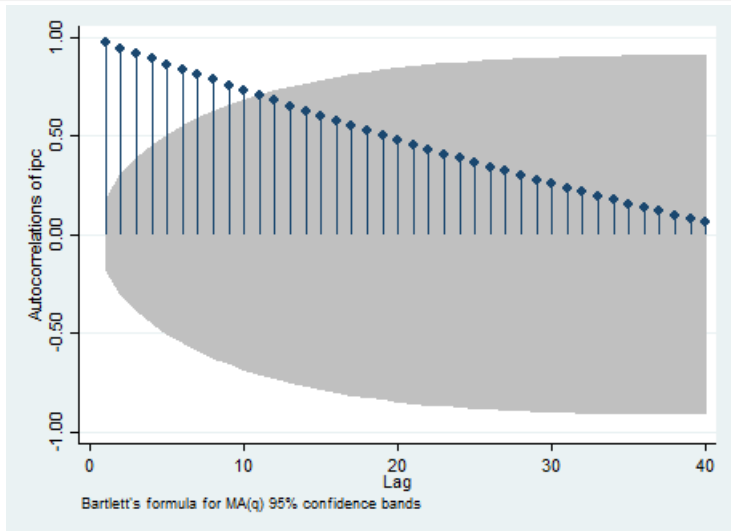
- `tsset TIEMPO`
- `ac YVAR`
- `corrgram YVAR`

(Nota: TIEMPO es la variable elegida para definir al tiempo.
YVAR es una variable serie temporal.)

La función de autocorrelación

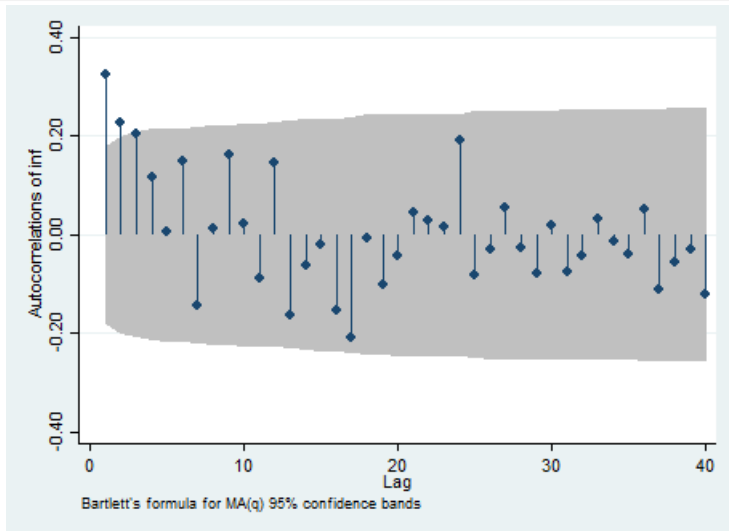
La función de autocorrelación es útil también para ver la existencia de ciclos. Por ejemplo, si la autocorrelación es alta cada ciclos de 12 meses, entonces la serie depende de lo que paso hace un año. Si esto fuera así habría alta correlación entre y_t con y_{t-12} , y_{t+12} , y_{t-24} , y_{t+24} , y_{t-36} , y_{t+36} ...

La función de autocorrelación: IPC



(Ver <http://www.indec.gov.ar/informacion-de-archivo.asp>)

La función de autocorrelación: Inflación IPC



(Ver <http://www.indec.gov.ar/informacion-de-archivo.asp>)

La función de autocorrelación parcial

Consideremos un AR(p)

$$\gamma_k = \text{Cov} [y_{t-k}, \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p}]$$

Tomemos $k = 0, 1, \dots, p$, para obtener $p + 1$ ecuaciones que se resuelven para $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_p$

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \dots + \phi_p \gamma_p + \sigma_e^2$$

$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 + \phi_2 \gamma_1 + \dots + \phi_{p-1} \gamma_{p-1}$$

.....

$$\gamma_p = \phi_1 \gamma_{p-1} + \phi_2 \gamma_{p-2} + \dots + \phi_p \gamma_0$$

La función de autocorrelación parcial

Dividiendo por γ_0 , obtenemos las ecuaciones de **Yule-Walker**

$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2\rho_1 + \dots + \phi_p\rho_{p-1}$$

.....

$$\rho_p = \phi_1\rho_{p-1} + \phi_2\rho_{p-2} + \dots + \phi_p$$

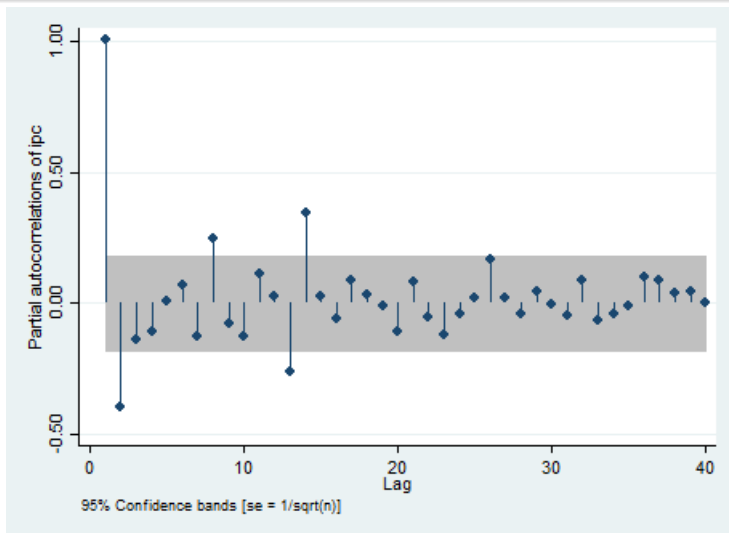
$$\rho_k = \phi_1\rho_{p-k} + \phi_2\rho_{p-k} + \dots + \phi_p\rho_{k-p}, k > p$$

La función de autocorrelación parcial

El orden p no se conoce. Entonces se resuelve las ecuaciones de Yule-Walker para valores sucesivos de p .

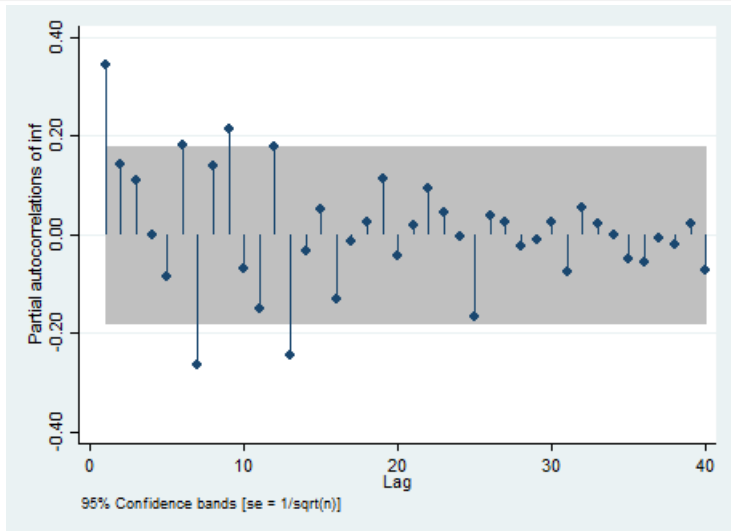
- *Asumiendo $p = 1$ obtenemos $\hat{a}_1 = \hat{\phi}_1$*
- *Asumiendo $p = 2$ obtenemos $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2$ entonces $\hat{a}_2 = \hat{\phi}_2$*
- *Asumiendo $p = 3$ obtenemos $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\phi}_3$ entonces $\hat{a}_3 = \hat{\phi}_3$*
- *Para graficar $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3, \dots$ En STATA: `pac YVAR`*
- *Para test de hipótesis $H_0 : a_k = 0$, usamos $\hat{a}_k \sim N(0, 1/T)$*

La función de autocorrelación parcial: IPC



(Ver <http://www.indec.gov.ar/informacion-de-archivo.asp>)

La función de autocorrelación parcial: Inflación IPC



(Ver <http://www.indec.gov.ar/informacion-de-archivo.asp>)

Correlograma IPC

```
. corrgram ipc
```

| LAG | AC | PAC | Q | Prob>Q | -1 | 0 | 1 | -1 | 0 | 1 |
|-----|--------|---------|--------|--------|-------------------|-------|---|----------|----------|----|
| | | | | | [Autocorrelation] | | | [Partial | Autocor] | |
| 1 | 0.9721 | 1.0101 | 116.27 | 0.0000 | | ----- | | ----- | | |
| 2 | 0.9448 | -0.3957 | 227.02 | 0.0000 | | ----- | | --- | | |
| 3 | 0.9176 | -0.1396 | 332.38 | 0.0000 | | ----- | | - | | |
| 4 | 0.8907 | -0.1061 | 432.51 | 0.0000 | | ----- | | | | |
| 5 | 0.8639 | 0.0108 | 527.51 | 0.0000 | | ----- | | | | |
| 6 | 0.8372 | 0.0677 | 617.52 | 0.0000 | | ----- | | | | |
| 7 | 0.8106 | -0.1294 | 702.65 | 0.0000 | | ----- | | - | | |
| 8 | 0.7841 | 0.2505 | 783.02 | 0.0000 | | ----- | | | -- | |
| 9 | 0.7576 | -0.0785 | 858.73 | 0.0000 | | ----- | | | | |
| 10 | 0.7311 | -0.1271 | 929.86 | 0.0000 | | ----- | | - | | |
| 11 | 0.7044 | 0.1115 | 996.5 | 0.0000 | | ----- | | | | |
| 12 | 0.6775 | 0.0250 | 1058.7 | 0.0000 | | ----- | | | | |
| 13 | 0.6514 | -0.2632 | 1116.8 | 0.0000 | | ----- | | | -- | |
| 14 | 0.6257 | 0.3457 | 1170.9 | 0.0000 | | ----- | | | | -- |
| 15 | 0.6007 | 0.0274 | 1221.2 | 0.0000 | | ----- | | | | |
| 16 | 0.5757 | -0.0562 | 1267.8 | 0.0000 | | ----- | | | | |
| 17 | 0.5510 | 0.0879 | 1311 | 0.0000 | | ----- | | | | |
| 18 | 0.5266 | 0.0325 | 1350.8 | 0.0000 | | ----- | | | | |
| 19 | 0.5026 | -0.0115 | 1387.4 | 0.0000 | | ----- | | | | |
| 20 | 0.4786 | -0.1092 | 1420.9 | 0.0000 | | ----- | | | | |
| 21 | 0.4549 | 0.0799 | 1451.5 | 0.0000 | | ----- | | | | |
| 22 | 0.4315 | -0.0534 | 1479.4 | 0.0000 | | ----- | | | | |
| 23 | 0.4087 | -0.1202 | 1504.6 | 0.0000 | | ----- | | | | |

Correlograma Inflación IPC

```
. corrgram inf
```

| LAG | AC | PAC | Q | Prob>Q | -1 | 0 | 1 | -1 | 0 | 1 |
|-----|---------|---------|--------|--------|-------------------|----|---|----------|----------|---|
| | | | | | [Autocorrelation] | | | [Partial | Autocor] | |
| 1 | 0.3251 | 0.3437 | 12.899 | 0.0003 | | -- | | -- | | |
| 2 | 0.2280 | 0.1438 | 19.294 | 0.0001 | | - | | - | | |
| 3 | 0.2042 | 0.1095 | 24.469 | 0.0000 | | - | | - | | |
| 4 | 0.1162 | -0.0020 | 26.159 | 0.0000 | | | | | | |
| 5 | 0.0067 | -0.0848 | 26.165 | 0.0001 | | | | | | |
| 6 | 0.1498 | 0.1818 | 29.022 | 0.0001 | | - | | - | | |
| 7 | -0.1435 | -0.2651 | 31.671 | 0.0000 | - | | | -- | | |
| 8 | 0.0127 | 0.1404 | 31.692 | 0.0001 | | | | - | | |
| 9 | 0.1608 | 0.2143 | 35.079 | 0.0001 | | - | | - | | |
| 10 | 0.0235 | -0.0695 | 35.151 | 0.0001 | | | | | | |
| 11 | -0.0887 | -0.1511 | 36.201 | 0.0002 | | | | - | | |
| 12 | 0.1472 | 0.1778 | 39.119 | 0.0001 | | - | | - | | |
| 13 | -0.1625 | -0.2452 | 42.705 | 0.0001 | - | | | - | | |
| 14 | -0.0620 | -0.0336 | 43.233 | 0.0001 | | | | | | |
| 15 | -0.0191 | 0.0511 | 43.283 | 0.0001 | | | | | | |
| 16 | -0.1524 | -0.1313 | 46.529 | 0.0001 | - | | | - | | |
| 17 | -0.2083 | -0.0136 | 52.655 | 0.0000 | - | | | | | |
| 18 | -0.0077 | 0.0248 | 52.663 | 0.0000 | | | | | | |
| 19 | -0.1005 | 0.1139 | 54.117 | 0.0000 | | | | | | |
| 20 | -0.0433 | -0.0430 | 54.39 | 0.0001 | | | | | | |
| 21 | 0.0442 | 0.0180 | 54.677 | 0.0001 | | | | | | |
| 22 | 0.0298 | 0.0926 | 54.809 | 0.0001 | | | | | | |
| 23 | 0.0158 | 0.0465 | 54.846 | 0.0002 | | | | | | |

Criterios de información para elegir rezagos/lags

Supongamos un modelo con K parámetros (ej., $AR(K - 2)$ con una constante y un estimador de la varianza), T es el tamaño de la muestra y σ_{err}^2 es el promedio de los errores al cuadrado. Los modelos de información cumplen un rol similar al R^2 ajustado, donde se penalizan la inclusión de parámetros (Parsimonia: es preferible un modelo con menos parámetros que con más.)

- Criterio de información de Akaike/Akaike information criterion (AIC):
 $\ln(\sigma_{err}^2) + 2K/T$ (idea similar al R^2 ajustado)
- Criterio de información bayesiano/Bayesian information criterion (BIC) o Schwarz criterion (SBC, SBIC): $\ln(\sigma_{err}^2) + 2K\ln(T)/T$
- Rezagos/lags son seleccionados para minimizar AIC o BIC.
- Notar que $AIC \geq BIC$. Entonces en general AIC selecciona más parámetros que BIC.
- En general los criterios reemplazan $\ln(\sigma_{err}^2)$ por $\ln(L)$ el logaritmo de la función de verosimilitud. Probar que para errores normales lo anterior es una igualdad.
- En STATA:
 - Luego de estimar el modelo (ej. `arima YVAR, arima(p,0,q)`):
`estat ic`
 - En el caso de que se quiera modelar solo con procesos AR: `varsoc YVAR`

Criterios de información para elegir rezagos/lags: Inflación IPC

| Model | Obs | ll(null) | ll(model) | df | AIC | BIC |
|-----------|-----|----------|-----------|----|------------------|------------------|
| AR(1) | 119 | . | 544.1034 | 3 | -1082.207 | -1073.869 |
| AR(2) | 119 | . | 545.3108 | 4 | -1082.622 | -1071.505 |
| MA(1) | 119 | . | 542.2383 | 3 | -1078.477 | -1070.139 |
| MA(2) | 119 | . | 543.5457 | 4 | -1079.091 | -1067.975 |
| ARMA(1,1) | 119 | . | 545.7594 | 4 | -1083.519 | -1072.402 |

Predicción (forecasting)

Uno de los usos fundamentales de las series temporales es predecir el futuro. La teoría tradicional de predicción se basa en dos supuestos:

- 1 El modelo econométrico es una buena representación del modelo económico (o de la realidad económica);
- 2 La estructura económica permanecerá relativamente estable en el futuro.

En base a estos supuestos entonces:

La mejor predicción se basa en el modelo que mejor “explica” los datos dentro de la muestra (in sample).

Predicción (forecasting)

- Supongamos que tenemos la serie $\{y_t\}_{t=0}^T$ y queremos predecir los valores futuros de y_t . Por ejemplo, la predicción un periodo hacia adelante (*one-step-ahead*) y_{T+1} , \hat{y}_{T+1} (siempre le agregamos un sombrero a las variables/parámetros a predecir)
- Supongamos que Ξ_t es el conjunto de información en el momento t . Esto incluye y_t y todos sus valores anteriores $\{y_0, y_1, \dots, y_{t-1}\}$ (y otras variables si la hubiere).¹
- ¿Cuál es la mejor manera de predecir y_{T+1} ?

¹En general se usa la terminología campo sigma o en inglés sigma-field para denotar toda la información disponible.

Predicción (forecasting)

Supongamos un modelo AR(1) $y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + e_t$, $E[e_t | \Xi_{t-1}] = 0$. Entonces,

- One-step-ahead forecast: $\hat{y}_T(1) = \hat{\phi}_0 + \hat{\phi}_1 y_T$. Esto es un estimador de $E[y_{T+1} | \Xi_T]$.
- Error de predicción (forecast error): $\hat{e}_T(1) = y_{T+1} - \hat{y}_T(1)$ (siempre es de esperar un error de predicción). Usando la propiedad anterior:
 $Var(\hat{e}_T(1) | \Xi_T) = \sigma_e^2$.
- 95% intervalo de predicción: $\hat{y}_T(1) \pm 1.96 * se(\hat{e}_T(1) | \Xi_T)$ (donde se es EL error estándar, o sea, la raíz cuadrada de la varianza del error)

Predicción (forecasting)

- Para predecir más periodos se debe hacer de forma iterativa. En general, cuanto más lejana es la predicción menos precisa va a ser: si $s < t$ entonces $\text{Var}[y_{t+1} - E[y_{t+1}|\Xi_t]] \leq \text{Var}[y_{t+1} - E[y_{t+1}|\Xi_s]]$.
- Entonces para construir \hat{y}_{T+2} usamos

$$\hat{y}_T(2) = \hat{\phi}_0 + \hat{\phi}_1 \hat{y}_T(1) = (1 + \hat{\phi}_1) \hat{\phi}_0 + \hat{\phi}_1^2 y_T$$

$$\text{Var}(\hat{\epsilon}_T(2)) = \text{Var}(y_{T+2} - \hat{y}_T(2)) = (1 + \hat{\phi}_1^2) \sigma_a^2$$

Notar que $\text{Var}(\hat{\epsilon}_T(2)|\Xi_T) \geq \text{Var}(\hat{\epsilon}_T(1)|\Xi_T)$.

- Notar que los modelos AR estacionarios satisfacen: $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \hat{y}_T(\ell) = E[y_T] = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1}$, o sea que la predicción a largo plazo debe acercarse a la media no condicional (la información por condicionar en el pasado deja de ser importante). Esta propiedad se conoce como *reversión a la media* (*mean reversion*). Ver más adelante los procesos de raíces unitarias donde esto no se cumple.
- En general, el error se incrementa reflejando que sabemos menos del futuro: $\text{Var}(\hat{\epsilon}_T(\ell)) \geq \text{Var}(\hat{\epsilon}_T(h))$ si $\ell > h$. Para los procesos AR estacionarios la varianza condicional se vuelve la varianza sin condicionar. Ej: $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{\epsilon}_T(\ell)) = E[y_T] = \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi_1^2}$

Predicción (forecasting)

Supongamos un modelo MA(1) $y_t = \alpha_0 + e_t + \alpha_1 e_{t-1}$, $E[e_t | \Xi_{t-1}] = 0$. Entonces,

- One-step-ahead forecast: $\hat{y}_T(1) = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \hat{e}_T$. Esto es un estimador de $E[y_{T+1} | \Xi_T]$. ¿De dónde sale \hat{e}_T ? Se puede construir del modelo.
- Two-step-ahead forecast: $\hat{y}_T(2) = \hat{\alpha}_0$. Esto es un estimador de $E[y_{T+2} | \Xi_T]$. ¿Por qué?

STATA

- Para pronósticos con ARMA ($\#p, \#q$) usar:
arima Y, arima($\#p, 0, \#q$)
estimates store arima
forecast create arimaexample, replace
forecast estimates arima, name(Yhat)
forecast solve, begin(A PARTIR DE CUANDO #T)
- Otra forma:
arima Y, arima($\#p, 0, \#q$)
predict Yhat, dynamic(A PARTIR DE CUANDO #T) y

STATA

```
use https://gabrielmontes.com.ar/IPC.dta, clear
summ t
ac inf
pac inf
arima inf, arima(1,0,1)
predict infpred, dynamic(80) y
line inf infpred date
```

Lecturas sugeridas

- Enders, W. "Applied Econometric Time Series", caps. 1,2.
- Johnston, J. y Dinardo, J. "Econometric Methods", cap. 7.