Maximización intertemporal

Gabriel Montes-Rojas
Universidad de Buenos Aires
Email: gabriel.montes@fce.uba.ar
Web: http://gabrielmontes.com.ar

Prefrencias intertemporales

- Supongamos que los consumos se puede dar en distintos momentos del tiempo, $t = 1, 2, ..., T$.
- Genéricamente podemos plantear una función de utilidad $U(c_1, ..., c_T)$.
- En general se asume *aditiva* en el tiempo $U(c_1, ..., c_T) = \sum_{t=1}^{T} u_t(c_t)$.
- El caso más usado es $U(c_1, ..., c_T) = \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} u(c_t)$, donde β es el factor de descuento.
- ¿Qué es β? Supongamos $T = 2$ periodos, una dotación inicial, w_1, y el problema $\max\, u(c_1) + \beta u(c_2)$ s.a $c_2 = w_1 - c_1$. Entonces, $\max\, u(c_1) + \beta u(w_1 - c_1)$. Maximizando obtenemos la CPO, $u'(c_1) - \beta u'(w_1 - c_1) = 0$, que la podemos reescribir como $\beta = \frac{u'(c_1)}{u'(c_2)}$. Así β es la TMS entre consumo presente y futuro.
- Si asumimos que $\beta < 1$ tenemos impaciencia en el tiempo, preferencia por consumir hoy a esperar a mañana.

Maximización intertemporal, sin incertidumbre

- Supongamos una serie de ingresos $y_1, ..., y_T$. En cada periodo se puede ahorrar o desahorrar. Sea b_t la tenencia de un bono que se puede comprar/vender en cada periodo. Este bono paga $(1 + r_t)b_t$ en el periodo $t + 1$ para los bonos comprados en el pediodo t.
- El problema es

$$\max_{(c_1,...,c_T),(b_1,...,b_{T-1})} \sum_{t=1}^{T} \beta^t u(c_t),$$

sujeto a $b_j = y_j + (1 + r_{j-1})b_{j-1} - c_j$, $b_0 = 0$ y $b_T = 0$.

- Supongamos una serie de ingresos y_1, y_2. El único precio que importa es la tasa de interés (real) r_1, que paga el bono comprado en $t = 1$ en $t = 2$.
- El problema es

$$\max_{(c_1,c_2),b_1} u(c_1) + \beta u(c_2),$$

sujeto a $b_1 = y_1 - c_1$, $0 = y_2 + (1 + r_1)b_1 - c_2$ (en el último periodo no hace falta ahorrar).

- Se puede reescribir como $\max_{(c_1,c_2)} u(c_1) + \beta u(c_2)$, s.a $0 = y_2 + (1 + r_1)(y_1 - c_1) - c_2$.
- Finalmente el problema se simplifica a $\max_{c_1} u(c_1) + \beta u\left(y_2 + (1 + r_1)(y_1 - c_1)\right)$.
- La CPO es

$$u'(c_1) - \beta(1 + r_1)u'(c_2) \Rightarrow (1 + r_1) = \frac{u'(c_1)}{\beta u'(c_2)}$$

La tasa de interés real debe ser igual a la TMS entre consumo hoy y mañana.

- Graficar curvas de indiferencia de $U(c_1, c_2)$ con la restricción de presupuesto $c_2 = y_2 + (1 + r_1)(y_1 - c_1)$ para ver el efecto de cambios en r_1.
- Asumir que $u(c) = ln(c)$, $u(c) = \frac{c^{\sigma} - 1}{\sigma}$. Resolver analíticamente.

2 periodos, sin incertidumbre, con precios

- Supongamos una serie de ingresos y_1, y_2. Supongamos que usamos el precio de $t = 1$ como numeral. Entonces tenemos dos precios (p_2, i_1). En este caso i_1 es la tasa de interés nominal.
- El problema es

$$\max_{(c_1,c_2),b_1} u(c_1) + \beta u(c_2),$$

  sujeto a $b_1 = y_1 - c_1$, $0 = p_2 y_2 + (1 + i_1)b_1 - p_2 c_2$.
- El problema es

$$\max_{(c_1,c_2)} u(c_1) + \beta u(c_2),$$

  sujeto a $0 = p_2 y_2 + (1 + r_2)(y_1 - c_1) - p_2 c_2$.
- El problema es

$$\max_{c_1} u(c_1) + \beta u\left(y_2 + (1 + i_2)/p_2(y_1 - c_1)\right).$$

- Asumir que $u(c) = ln(c)$, $u(c) = \frac{c^\sigma - 1}{\sigma}$.

2 periodos, con incertidumbre

- Supongamos que el invididuo tiene una dotación inicial, w_1.
- $w_1 - c_1$ lo puede invertir en activo sin riesgo que genera $R_0 = (1 + r_0)$ y en activo con riesgo que genera $R_1 = (1 + r_1)$ con incertidumbre (es una variable aleatoria). Sea x la proporción que invierte en el activo riesgoso.
- Entonces $c_2 = (w_1 - c_1)[R_1 x + R_0(1 - x)]$.
- El problema en términos d ela utilidad esperada es

$$V_1(w_1) = \max_{c_1, x} u(c_1) + \beta E u((w_1 - c_1)[R_1 x + R_0(1 - x)]).$$

- La función V_1 es la utilidad indirecta, la máxima utilidad alcanzable dada la riqueza.
- La CPO es

$$u'(c_1) = \beta E\left[u'(c_2) * (R_1 x + R_0(1 - x))\right]$$

$$E\left[u'(c_2) * (R_1 - R_0)\right] = 0$$